EUKLIDES.

AZ ELEMEK

ELSŐ HAT KÖNYVE.

EUKLIDES.

AZ ELEMEK

ELSŐ HAT KÖNYVE.

A HEIBERG-FÉLE SZÖVEGKIADÁS FELHASZNÁLÁSÁVAL

FORDITOTTA

BAUMGARTNER ALAJOS.

BUDAPEST.
FRANKLIN-TÁRSULAT
MAGYAR IROD. INTÉZET ÉS KÖNYVNYOMDA.
1905.

Különlenyomat a Rátz László szerkesztésében megjelenő Középiskolai Mathematikai Lapok XI. és XII. évfolyamából.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ELŐSZÓ.

A mathematika a görög tudományos életben mindig fontos tényező volt; a filozófiai gondolkodás legtöbbször reátámaszkodott e tudományra rendszereinek felállításánál. A pythagoreusok egész metafizikai jelentőséget tulajdonítottak a mathematikának (a Kr. e. V. században), Plato pedig (élt Kr. e. 429—347) a filozófiai gondolkodás képző eszközének, a megismerés szükségszerű lépcsőjének tekintette, mely nélkül senki sem juthat el az igazi filozófiához. E felfogás következtében a mathematika előkelő helyet foglalt el a közoktatásban, a közművelődésben és a tudományos életben. Kitartóan kutató és éleselméjű férfiak egész csapata foglalkozott azokkal a problemákkal, melyeket a platoi iskolában felvetettek, nevezetesen: a kör négyszögesítésével, a szögnek három részre való osztásával és főleg a kocka megkétszeresítésével, az ú. n. delosi problemával.

Plato halála után nemsokára azonban a makedoniai beavatkozás a görögök politikai életébe meglehetősen meggyengítette azt a hatalmas szellemi tevékenységet is, melynek eredménye a nagy görög kultura volt, de mivel a makedonok meghajoltak a görög szellem fensége előtt és kötelességüknek tartották, hogy azt minden lehető módon terjesszék, ez a nagy makedoniai birodalom összes országaiban valóban olyannyira erős gyökeret vert, hogy tulajdonképen ez országok egyike-másika lett a görög műveltség és tudomány székhelye, így első sorban a Nagy Sándor által alapított Alexandria.

Itt tűnt fel a Kr. e. III. század elején, nem ugyan személyiségével, de tudományos tetteivel szinte meteorszerűleg az a tudós, kinek óriási tudományos alkotását immár 2200 év óta csodálják meg a generációk, itt tette örökéletüvé a nevét Euklides. Meglepő, váratlan, bámulatba ejtő volt megjelenése, mint Danteé és Shakespeareé és működése nem volt oly fejlődésszerű, a viszonyok előkészített voltából majdnem szükségszerűen folyó következmény, mint Michelangeloé, Goetheé, Beethovené, Wagneré és más ily szellemi titánoké. Nem ok nélkül hasonlítjuk össze Euklidest a művészekkel, mert alkotásában ugyanaz a divináció mutatkozik, ugyanaz az isteni szikra csillan fel, mint azokéban. Ép oly teremtő erő, mint azok, mert abból a bár gazdag, de azért mégis még kaotikus rendszertelenségű tudományos anyagból, melyet a platoi iskola későbbi koroknak örökségképen hagyott, oly hatalmas, összefüggő, szilárd szintetikus alkotmányt épített fel, melynek nemcsak részletes beható tanulmányozásakor, de már első, általános áttekintésekor is okvetetlenül az az érzés fog el bennünket, melyet csakis ihletben, mintegy látnoki erőben megfogamzott, szellemünket megigéző költői avagy tudományos nagyarányú kompozició kelt.

Euklides művének kifejezhetetlen nagy értéke csak akkor tünik fel szemünk előtt tiszta világításban, ha azt tudománytörténeti vonatkozásaiban, történeti magaslatról itéljük meg és ezáltal megértjük, mit jelentett az *Elemek* megalkotása abban a korban, melyben megszületett és felfogjuk azt az összefüggést, melyben mind mai napig és örök időkig a mathematikai tudománnyal van. Mélyen és kritikailag kell bepillantanunk abba a helyzetbe, melyben a mathematikai tudomány Euklides előtt és Euklides korában volt. Mind a gyakorlati élet, mind a tudományos szempont követelései folytán megindult mathematikai vizsgálódások közepette a számbeli összefüggések és geometriai tételek meg szerkesztések bámulatosan gazdag tömege támadt, de mindezek az ismeretek legnagyobbrészt összefüggéstelenek, lazák vagy viszont nagyon is egy pont köré csoportosulók voltak; tudományos rendszer nem volt bennük. Egyes módszeres eljárások is kezdtek ugyan már kialakulni a szigorúan tudományos elvű és filozófiai nevelésű platoi iskola rendszeréből kifolyólag, de ezek is csak szűkebb körökre szorítkoztak és általános mathematikai módszerekké még ki nem fejlődtek. Végre pedig az a viszony is, mely a mathematika és a filozófia között volt, inkább gátlólag, semmint elősegítőleg hatott a mathematika önálló, rendszeres fejlődésére: bár a filozófia a mathematikára, mint fontos segédeszközére támaszkodott, mégis lenyügözte, mert tisztán csak a saját céljainak szolgáló ágaiban érdeklődött kifejlődése iránt, tisztán mathematikai kiépítésre célzó törekvéseket azonban nem istápolt. A platoi iskola tagjai megelégedtek azzal és azt helyesnek is tartották, hogy ők filozófusok, akik a mathematikához is értenek és nem pályáztak arra a dicsőségre, hogy mathematikusok legyenek, akiknek filozófiai képzettségük is van. Így tehát a platoi iskola mathematikai foglalkozása mai szempontból megitélve sok tekintetben bizonyos műkedvelés jellegét öltötte fel, aminek egyik fő ismertető vonása az volt, hogy csak egyes kedveltebb kérdések (mint a már előbb említett körnégyszögesítés, szögharmadozás és delosi problema) körén belül maradt és ott bámulatos eredményeket ért el, a teljes mathematikai rendszer óriási gondolkodási jelentőségének felismerése azonban még nem igen nyilatkozik meg benne.

Ilyen viszonyok között találta Euklides a mathematikát a Kr. e. 300. év körül és tudományos tettének értéke abban rejlik, hogy mindazoktól az akadályoktól, hézagoktól, egyoldaluságoktól, lazaságoktól, melyek a mathematika eddigi fejlődésében észlelhetők voltak, felszabadította e nagy tudományt és önálló, szerves, rendszeres, bizonyító erejű észbeli disciplinává tette. Nagy és merész lépést tett azzal, hogy mathematikai rendszerét minden filozófiai behatástól menten építette fel; nem fogadott el semmiféle filozófiai útmutatást, nem engedett meg semmiféle megszorítást, hanem művét tisztán, mint mathematikus, mint szakember állította össze. Azzal pedig, hogy tudományának biztos alapokra támaszkodó, céltudatosan haladó, szigorú következetességű szervezetet adott, a mathematikát egyszerre oly magaslatra emelte, melyet a többi tudomány legtávolabbról sem ért el. A mathematika Euklides műve révén a legkomolyabb tudomány lett, minden kalandosságtól, kétségtől, kivételtől menten és kritikai erejével az egész tudományos gondolkodásra fegyelmező és nevelő hatásúvá vált.

Euklides saját korában valószinűleg még nem igen mutatkozott ez a hatás, az akkori irodalmi körülmények, az írások sokszorosító módszerei és a közlekedési viszonyok nem voltak alkalmasak irodalmi termékek gyors megismerésére és így Euklides életében a világ aligha sejtette, mily mérhetetlen kincs rejlik az alexandriai Múzeum könyvtárában; hogy azonban későbbi korok felfogták az *Elemek* becsét, azt az élénk irodalom mutatja, mely a mű körül kommentárok, tanulmányok, sőt egyes, bár szerény, javitási kisérletek alakjában is keletkezett. Euklides munkája egyszeriben a mathematikusoknak szinte előírt, a szó legnemesebb értelmében vett tankönyve lett, Euklides pedig megtámadhatatlan tekintélyű tanító-mestere.

Az *Elemek* tekintélyéhez a mű szerves, harmonikus voltán, bizonyos befejezettségén kívül nem csekély mértékben járult annak módszere is: a *szintetikus tárgyalás*.

Minden tudomány fejlődésének első idejében az eredmények előre bejelentett módszer nélkül, váltakozva, esetlegesen születtek meg; így a mathematikában is mind a szerkesztések megoldásai, mind a tételek hol analitikus, hol szintetikus módon származtak. Azt mondhatjuk, hogy főleg a mathematikában az analitikai vagy szintetikai eljárás bizonyos egyéni hajlandóságtól is függ; némelyik kutató elme szívesebben indul ki valamely adott alakzatból és azt részeire bontva, tanulmányozza, másik viszont inkább az alapelemeket mintegy kisérletileg, bizonyos kombinaló módszerrel csoportosítja, miközben esetleg sok sikertelenség közepette is egyes esetekben hasznos végeredményekhez jut. Elhamarkodott dolog lenne, ha rövidesen itéletet akarnánk mondani, hogy a kettő közül melyik a helyesebb módszer? Mindkettőnek egyenlő jogosultsága van a mathematikai kutatásban, hacsak könnyedén, mesterkéletlenül és meggyőzően vezet az eredményre. Hogy pedig ez mikor áll be, erre már inkább megkockáztathatjuk ezt a kijelentést: egyszerűbb és kevesebb számú elem esetében, amikor tehát a kombinálás lehetősége is korlátoltabb, a szintetikus eljárás vezethet könnyen sikerre, ellenben komplikáltabb szerkezeteknél inkább az analitikai módszertől várható eredmény; általánosságban tehát az analitikai módszernek van tágabb tere. A két módszer alkalmazására utalok egy tipikus példára, melyet egyszerűség kedvéért a modern algebra anyagából veszek. Tegyük fel, hogy az

$$x^2+px+q=0$$

másodfokú egyenletnek kiszámítottuk a két gyökét:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Látjuk, hogy a gyökök konjugált számok és így nagyon közelfekvő az a gondolat, hogy a két gyököt valami módon összekapcsoljuk, nevezetesen, hogy megalkossuk összegüket és szorzatukat;

ezeket valóban elvégezve, kapjuk ezeket:

$$x_1+x_2=-p$$
$$x_1x_2=q.$$

E két nevezetes eredményt tehát szintetikus úton kaptuk meg.

Ha a most nyert eredményekből az együtthatókat:

$$p=-(x_1+x_2)$$
$$q=x_1x_2$$

behelyettesítjük a másodfokú egyenletbe és a következő átalakításokat elvégezzük:

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=$$
$$=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2),$$

azt látjuk, hogy a másodfokú egyenlet két tényező szorzatára bontható fel, melyek az ismeretlennek és a gyököknek bizonyos kapcsolatai (a gyöktényezők).

Ez az eredmény tehát analitikai módon származott.

És el sem képzelhető, hogy valaki valaha is *első kutatásában*, tehát a gyöktényezők kapcsolatának ismerete nélkül, így járhatott volna el: alkossuk meg az ismeretlennek és egy-egy gyöknek a különbségét és szorozzuk meg ezeket egymással:

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2=$$
$$=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+px+q.$$

A gyöktényezők tétele tehát nem keletkezhetett szintetikus módon, mert nem tehető fel, hogy valaki találomra épen az $x-x_1$ $x-x_2$ elemekre gondolt volna.

Tanítás céljából azonban igenis lehet az analizis útján végeredményképen nyert elemekből kiindulni és szintézis révén a tételhez jutni. A szintézis tehát esetleg igénybe veheti azokat az összefüggéseket, amelyeket az analizis ismertetett meg és a fordított utat követi; ilyenkor azonban a szintézis nem mutatja be a tudományos kutatás fejlődésszerű menetét, hanem csak gyors lépésben, biztos, de nem igen megokolt úton haladva, bizonyos bizalmat és tekintélyt követelve magának és némi szellemi gyámkodás alá helyezve a követőt, vezet el a végeredményhez, szóval: tanít és ezáltal esetleg kissé szkolasztikussá válik.

Euklides módszere általánosságban ilyen reproduktiv szintézis, mely analitikai eredményeket szintetikus alakba átgyúr; ilyennek ismerte meg már Newton is.* Művének első szava a legegyszerűbb geometriai elem: a pont, azután nagy előrelátással és körültekintéssel megismerteti mindazokat az elemeket, melyekre szüksége van. Majdnem az összes feladatokban és tételekben láthatjuk a szintézist: mindig az elemek (az előzmények) csoportosításából fejlődik ki a végeredmény. Legjellemzőbb példák erre egyszerűségüknél fogva az I. könyv 9., 10. és 11. feladata, melyekből leginkább kitűnik az eredetileg csak analitikai módon nyerhető eredmények szintetikus úton való elérése. Egyes feladatokban és tételekben azonban az általános szintetikus meneten kívül más eljárás is vegyül a tárgyalásba: amikor Euklides egy felvett megoldást elemezve, megvizsgálja, vajjon helyes-e ez? Ezek az ő apagogikus bizonyításai, melyek tehát tulajdonképen analitikaiak és melyeknek egyik tipikus példája az I. könyv 6. feladata. Így tehát egyes esetekben lehet szó Euklides művében analitikai módszerről is.

A mű egészében azonban szigorúan szintetikus úton épült fel, nyilvánvalóan didaktikai célzattal. És ez a szintetikus módszer adja meg a műnek azt a bámulatos szilárdságát, határozottságát, láncolatosságát, melyet más tudományos mű egyhamar el nem ért. A művel való első foglalkozás elkalmával talán némi kishitűség vesz erőt a tanítványon, mert nem látja mindjárt maga előtt a végcélokat, melyekhez a szintetikus módszer vezet, de ha az igazi tudományszeretet kitartásával a műbe mélyebben behatol és visszafelé tekint, lelkét megigézi a hatalmas mű — mondhatni — élő szervezetének megismerése. És aki erre a magaslatra emelkedett, megérzi és megérti azt, hogy igazán nagyszabású tudományos mű ép úgy képes az emberi lelket elragadni, mint valamely művészi alkotás.

*

Egészen más megitélés alá esik az a kérdés, vajjon manapság is használjuk-e a mathematika tanítására Euklides művét eredeti alakjában? E tekintetben habozás nélkül nemmel felelhetünk, mert nyilvánvalóan az *Elemek* jelentősége más mint úttörő, módszert megadó irodalmi termék és más az újabbkori mathematikai szempontokkal, módszerekkel és jelölésekkel szemben. Modern didaktikai

---

* Wundt: Methodenlehre 1883 (p. 9.).

szempont szerint a mathematikai anyagot inkább analitikailag összefüggő csoportokba rendezzük, miáltal már előzetesen is nagyobb áttekintést adunk az egészről. Ma pl. kitűzött célképen külön tárgyaljuk az idomok és főleg a háromszögek egybevágóságát, míg Euklides erre az összefüggő diszciplinára nem volt tekintettel; csak annyiban tárgyalta, amennyiben szüksége volt későbbi bizonyításokra, azért kerültek a háromszög egybevágósági esetei szétszórtan és hiányosan az *Elemek*be. Az antik és a modern szempontok e különbsége már is magával hozza a módszerek igénybevételének különbségét is; a szintézist lehetőleg mellőzzük és a szabadabb, mert áttekintést nyujtó és a mathematikai kutatások folyamatát feltáró analizist alkalmazzuk. Végre pedig semmiképen sem volna kivánatos, hogy egyszerű, áttekintő modern algebrai jelöléseinket mellőzzük és az *Elemek*nek azokat a tételeit, melyek lényegileg *algebrai* természetűek (mint pl. a II. könyv identitásai), Euklidesnek manapság már nehézkesnek feltünő módszerében tárgyaljuk. Mindezekhez hozzájárul még a tudományos nyelv kifejlődése is, mely a mi időnkben számos egyszerű, rövid, de tartalmas mathematikai kifejezést adott rendelkezésünkre, melyeknek hiányában Euklides gyakran kénytelen volt körülményes, néha nem is egészen szabatos magyarázatokat használni.

Mi teszi tehát mégis oly becsessé az *Elemek*et még mai korunkban is, melynek tudományos módszere pedig némi ellentétben áll az ókori művel? Első sorban mindenesetre az a körülmény is, hogy az első tudományos és módszeres mathematikai tankönyv, de még fontosabb az, hogy örök időknek tanúságául érvényesül benne a szoros kapcsolat és láncolatosság, mely a mathematikai tételek között fennáll és a szigorú logikai bizonyítás, mely semmi kétséget, semmi félremagyarázást meg nem enged. És főleg a tisztán geometriai könyvekben a bizonyítás oly mintaszerű, hogy akárhány esetben még ma is változatlanul használjuk azt.

A geometriai könyveknek ez a talán örök időkre szóló mintaszerűsége a bizonyításban egyszersmind oka annak, hogy főleg újabb időben az *Elemek*nek csak első hat könyvét szokták kiadni, vagyis a planimetriai könyveket; ezek közül ugyan kettő lényegileg algebrai (a II. és az V.), de ezek oly szoros kapcsolatban állanak a III. és IV. meg a VI. könyvvel, hogy szó sem lehet mellőzésükről. A többi, tisztán geometriai (XI., XII. és XIII.) könyvből pedig már nem annyira vagy helyenkint csak ismétléskepen alakul ki

Euklides bizonyítási módszere és így ezeket sem szokás közrebocsátani.

Ez szolgáljon megokolásául annak a körülménynek, hogy a jelen kiadás is csak az *Elemek* első hat könyvét foglalja magában.

*

Végre még a fordításról akarok néhány szóban beszámolni. Lehetőleg szószerint fordítottam a szöveget; legfeljebb oly helyeken változtattam, ahol szószerinti fordításban a megértés nehézségekbe ütközném; továbbá, minthogy mathematikai nyelvünk úgy állapodott meg, hogy a többes szám első személyében fejeződnek ki a mennyiségtani operációk, a görögben használt szenvedő alakokat az egész fordított rész folyamán magyar szólásmódunk értelmében alakítottam át. Egyébképen arra törekedtem, hogy a mű régies zománca épségben maradjon és talán ez is hozzájárul ahhoz, hogy a magyar tudománykedvelő közönség lehetőleg közvetlenül ismerhesse meg Euklides mesterművét, melynek jelentősége a mathematikai gondolkozásban időtlen időkre kihat.

Budapest, 1905. jan. 9.

Baumgartner Alajos.

BEVEZETÉS.

A régi Alexandria.

Egyiptom az utolsó fáraójának, III. Pszammenitnek a pelusioni csatában való elestével perzsa provincia lett Kr. e. 525-ben. A perzsák kegyetlenkedése azonban az egyiptomiak gyakori fölkelését okozta, melynek egyike Egyiptomot rövid időre (405—340 Kr. e.) ismét függetlenné tette. 340-ben Ohosz perzsa király újra leigázta, míg végre 332-ben az ó-kor egyik legérdekesebb egyénisége, Nagy Sándor makedóniai király hódította meg Egyiptomot elég könnyű szerrel, mert az egyiptomiak maguk akadályozták meg Megazest, a perzsa szatrapát abban, hogy a hódítóval szemben keményebb ellenállást kifejthessen. Nagy Sándor ismerte Egyiptomnak és népének becsét, azért egyik legműveltebb hadvezérét, Ptolemaios Lagost tette meg az ország helytartójává, kivel együtt minden téren gazdagította és megszilárdította Afrikának ezt az értékes területét.

Nagy Sándor mindenekelőtt fényes várost alapított a tenger és a Mareotis tava között fekvő partszegélyen és az előtte fekvő Pharos szigeten (melyet egy későbbi király a szárazfölddel egy hét stadium (1290 *m*) hosszú gáttal, a heptastadion által kötött össze). A várost pedig saját nevéről Alexandriának nevezte el. Az új város közepében egy hatalmas tér terült el, amelyen két, 30 *m*-nél szélesebb főutca metszette egymást. A város legelőkelőbb negyede annak északkeleti része lett, a Bruheion, melyet a legdíszesebb paloták alkottak. De a város egyéb helyein is monumentális épületek emelkedtek. A legnevezetesebb épületek ezek voltak: a királyi palota, a Múzeum, a szinház, a gimnázium, a paneum, a Szerapeion, a pharosi világító torony stb.

Ez volt Alexandria külső képe, mely ilyenné főleg Nagy Sándor halála után (323 Kr. e.) Ptolemaios Lagos uralkodása alatt alakult ki. Egyiptom ugyanis Kr. e. 305-ig még makedóniai fenhatóság alatt állott, ekkor azonban Ptolemaios Lagos, eddigi helytartója felvette a királyi címet és mint király Kr. e. 285-ig uralkodott. Ez évben lemondott a trónról fia javára és meghalt Kr. e. 283-ban.

Ptolemaios Lagos azonban a fényben és gazdagságban úszó Alexandriát, melyet a városok városának és a Kelet királynéjának neveztek, még a tudomány székhelyévé is felavatta. A Múzeum a legkiválóbb tudósoknak gondtalan és kényelmes otthont adott, úgy hogy ezek zavartalanul a tudománynak élhettek. Ugyancsak a tudomány művelésére pedig két nagy könyvtárt is építtetett a király;

A régi Alexandria térképe.

az egyik Szerapeion néven a Szerapisz templomához tartozott, a másik a Múzeumhoz. Mindkét helyen a másolók nagy száma fáradozott a könyvtár kéziratainak gyarapításán. A Múzeum a királyi palotával állt összeköttetésben, úgy hogy a király és a tudósok könnyen fölkereshették egymást. Az épület nagy oszlopos csarnokaiban és folyosóiban a tudósok tanítványaikkal jártak fel s alá, mert a tanítás görög módon folyt le. A Múzeumban, melynek legnagyobb részét a könyvtár foglalta el, voltak egyszersmind a tudósok lakásai is. A másolókon kívül még korrektorok és könyvtári munkások állottak a tudósok rendelkezésére. A költségeket terjedelmes birtokok jövedelmei fedezték.

Alexandriába a görög műveltség és tudomány vonult be, amit az összes körülmények elősegítettek. Nagy Sándor maga görög nevelésben részesült; nem kisebb ember, mint Aristoteles, volt egyik későbbi nevelője. Bár a görögöket függetlenségüktől megfosztotta, egész uralkodása alatt a görög szellemet és műveltséget terjesztette. Ptolemaios Lagos hasonlóképen görög műveltségű ember volt és ezért főleg görög tudósokat hivott a Múzeumba. Ily módon össze is gyülekeztek Alexandriában a legkiválóbb görög bölcsészek, filológusok, orvosok, mathematikusok és csillagászok.

Euklides.

Az alexandriai Múzeumnak, mindjárt ennek első idejében, egyik mathematikusa Euklides volt, kit a király maga hivott e helyre. Itt fejtette ki a mathematika rendszerét és helyezte ezt a tudományt a vele rokon tudományok között az első helyre. Életrajzából azonban alig tudunk adatokat; születésének sem helyét, sem idejét nem ismerjük. Némelyek szerint Egyiptomban, arab források szerint azonban a sziriabeli Tyrus városában született, mint egy Damaszkuszból származó, de Tyrusban megtelepedett Naukrates nevű görög ember fia. Naukrates valószinüleg Athenébe küldötte fiát tanulmányútra és Euklides onnan kerülhetett Alexandriába. Ez Kr. e. 300 körül lehetett; munkásságának korszakát pedig a Kr. e. 300 és 280 közötti évekbe tehetjük. Úgy látszik teljesen csak hivatásának élt és élete végéig a Múzeumban dolgozott; halála évét sem ismerjük. Személyéről utóbb teljesen megfeledkeztek; még a nevét sem igen ismerték, hanem századokon keresztül a στοιχεῖα (*Elemek*) című műve révén csak így emlitették meg: a Στοιχειώτης. A Kr. u. első századokban meg épen összetévesztették a megarabeli Euklidesszel, aki Sokrates halála után (399 Kr. e.) ennek tanítványait maga köré gyűjtve, megalapította a megarai iskolát.

Csak Proklos (élt 412—485 Kr. u.) emelte ki ismét az ismeretlenségből Euklides személyét és oszlatta el a hozzája füződő téveseket. Proklos ezeket írja róla Kr. u. 450 körül:

> Nem sokkal fiatalabb ezeknél * Euklides, ki az *Elemek*et összeállította, miközben sokat, ami Eudoxustól ** származik,

* Hermion és Philippos, Plato tanítványa.

** Eudoxus (élt Kr. e. 408—355) az arányoknak egész általános tárgyalását adta meg; számos mértani tétele közül pedig a legfontosabb ez a stereometriai tétel: a gúla harmadrésze a vele egyenlő alapú és magasságú hasábnak.

rendszeres összefüggésbe hozott, sokat, amit Theaitetos * megkezdett, befejezett és azonkívül sokat, amit régebben a szükséges szigorúság nélkül bizonyítottak, megtámadhatatlan bizonyításokra visszavezetett. E férfi virágzásának kora pedig I. Ptolemaios alatt volt. Mert Archimedes,** kinek élete az első Ptolemaios alatt kezdődik, megemlíti Euklidest és pedig ezt mondja el: Ptolemaios egyszer azt kérdezte Euklidestől, vajjon nincs-e kényelmesebb út a geometriához, mint az *Elemek*en át? Ez azonban ezt felelte: «A geometriához királyok számára sincs külön út.»

Egy másik adomaszerű adatot Stobaios (élt 500 körül Kr. u.) egyik munkájából ismerünk:

Valaki, aki Euklidestől geometriát kezdett tanulni, azt kérdezte, miután (az *Elemek*ből) az első tételt megtanulta: «Mi hasznom van most abból, hogy ezt megtanultam?» Euklides előhívta rabszolgáját és ezt mondta: «Adj neki három oboloszt, mert ő azért tanul, hogy haszna legyen.»

Euklides jelleméről továbbá alexandriai Pappostól (élt a Kr. u. III. század végén) tudunk meg néhány vonást. Leirása szerint Euklides szelid és szerény volt, jó akarattal mindenki iránt, aki mathematikát valamiképen fejleszteni volt képes és korábbi vívmányokon szándékosan lehetőleg keveset változtatott.

Mindezek a jelek arra mutatnak, hogy Euklides szerény, de önérzetes, emberi hiúságok nélkül való, tisztán a tudománynak élő igazi tudós volt.

Euklides művei.

Euklides legnagyobb műve, mely már egymagában is örök hírnevet biztosított szerzőjének, a Στοιχεῖα, az *Elemek* 13 könyve. Korszakalkotó munkával állunk szemben e műben, a mely a mathematikának első tökéletes tankönyve. Csak ennek a műnek alapján lehetett utóbb ezt a tudományt biztosan, világosan tovább fejleszteni. Az *Elemek* bővebb ismertetése a következő fejezetek feladata.

Euklidesnek más két, kisebb műve tárgyilag az *Elemek*kel áll kapcsolatban. Az első ezek közül a Δεδόμενα, az *Adatok* címü mű,

* A Kr. e. IV. században élt és főleg a számok tulajdonságait meg az öt szabályos testet tanulmányozta.

** Élt Kr. e. 287—212.

mely az *Elemek* átismétlésére szolgáló definiciók és tételek gyűjteménye. A definiciók megmondják, hogy a nagyság szerinti adatok: a tér, a vonal és a szög, a helyzet szerinti adatok pedig: a pont és ismét a vonal meg a szög, ha ugyanis mindig ugyanazon a helyen vannak. A definiciók után 95 tétel következik, melyek megállapítják, hogy ha bizonyos dolgok adottak, egyidejüleg más dolgok is adottak. Szolgáljon mutatóúl e néhány tétel:

1. *Adott mennyiségek egymáshoz adott arányban vannak.*
2. *Ha egy adott mennyiség egy másikkal adott arányban áll, a másik is adott.*
25. *Ha két adott vonal egymást metszi, metszési pontjuk is adott.*
40. *Ha a háromszögben mindegyik szög nagyság szerint adott, a háromszög fajára nézve adott.*

A másik mű a Πόρισμα (a porizmák) három könyve, melyek azonban elvesztek; tartalmukat csak Pappos adataiból ismerjük. Porizma alatt oly tételt kell értenünk, mely valamely összefüggést állapít meg bizonyos adott és más, ezek révén meghatározott, habár még ismeretlen dolgok között. Ennek világosabb magyarázatára nagyon alkalmas az a példa, melyet már Proklos felemlít, hogy egy adott körnek egyszersmind a középpontja is meg van határozva, de csak bizonyos szerkesztés elvégzése által tálalható meg. A porizmák könyveiben 171 tétel volt, melyek az *Elemek* tételeinek önálló alkalmazásai voltak. Pappos 29 csoportba osztotta be e tételeket, mutatóúl azonban szószerint csak egyetlen egyet közölt, mely a teljes négyszög egyeneseinek metszési viszonyairól szól.

Nagyon érdekes tárgyat tartalmazó műve még a Περὶ διαιρέσεων *(A felosztásokról)* című könyv, mely arab fordításban maradt meg. 1563 körül John Dee találta meg és fordította latinra ezt a művet, melyet a Gregory-féle Euklides-kiadásban már felvettek. A műben foglalt feladatok közül ezek említendők meg: felosztandók háromszögek és négyszögek adott irányú vonallal adott arányban; felosztandó az ötszög vagy az egyik csúcspontján átmenő vagy pedig egyik oldalával párhuzamos vonallal ugyancsak adott arányban; megfelezendő egy körívből és két egyenesből álló idom a körív középpontján átmenő vonallal stb.

Euklides a kúpszeletekről is írt négy könyvet (Κωνικά), melyek azonban elvesztek. Pappos említi meg azokat és azt is, hogy Euklidesnek erre a művére támaszkodik lényegében Apollonius (élt Kr. e. 247—200 körül) hasonló című művének négy első könyve.

Hasonlóképen elveszett Euklidesnek még két más műve; ezek a Ψευδάρια *(Álkövetkeztetések)* és a Τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν *(Helyek a felületen)* című iratok. Pappos nyilatkozataiból azt következtethetjük, hogy ez utóbbi műben henger-, esetleg kúpfelületeken fekvő görbéket tárgyalt Euklides.

Fenmaradt azonban Euklidesnek egy Φαινόμενα című műve csillagászati tartalommal, mely főleg bevezető gömbtani tételei miatt fontos.

Egy *Optika* című műben Euklides a távlattan alaptételeit tárgyalta, melyek különböző mérések eszközlésére alkalmasak. A *Katoptrika* című művet is Euklidesnek tulajdonították, ujabb időben azonban kétségbe vonták, hogy Euklides a szerzője.

Végre pedig megemlítendő Euklidesnek a hangközökről szóló hangtani műve: a Κατατομὴ κανόνος. Egy másik zenei műről *(Bevezetés az összhangzattanba)* azonban már a XVI. század végén kimutatták, hogy az nem Euklides műve, mint addig hitték, hanem a Kr. e. IV. századbeli Kleionidesé.

Az Elemek.

Euklides fő műve, melynek címe Στοιχεῖα, az *Elemek*, magában foglalja az egész elemi mathematikát egészen a kúpszeletekig és teljes képet ad a görögök addigi mathematikai ismereteiről. Mert, míg az Euklides előtti időkből csak egyes adatokat, problémákat, magukban álló tételeket ismerünk, most e műben egy egész alkotmányt látunk, teljes rendszerben, hézagok és ugrások nélkül. Összegyüjtötte mindazokat a dolgokat, melyeket Thalestől (élt Kr. e. 624—543) és Pythagorastól (élt Kr. e. 569—470) kezdve egészen a plátói és aristotelesi iskolákig (a Kr. e. IV. században) feldolgoztak és ezeket elrendezve, páratlan tudományos éleslátással, szigorú következtetéssel és világos áttekinthetőséggel oly tökéletes munkát alkotott, melyről minden kornak mathematikusai a legnagyobb csodálattal nyilatkoztak és mely a mathematikai irodalomnak egyik örökbecsű gyöngye.

A 13 könyvet tartalmi összefüggésük szerint négy csoportba lehet beosztani. *Az első hat könyv a sík mértant tárgyalja.* Az I. könyv tartalma: a háromszög oldalainak és szögeinek fontosabb tételei, háromszögek szerkesztése, merőleges és párhuzamos vonalok tételei, négyszögek és háromszögek területe. A II. könyv terjedelemre nézve a legkisebb, de tartalom tekintetében a mű legtanulságosabb részeinek egyike, mert anyaga révén bepillantást nyerünk az egész görög mathematikai felfogásba és módszerbe. Nem csekélyebb dologgal ismerkedünk meg a II. könyvben, mint a görögök algebrájával, melyben azonban minden mathematikai fejtegetésüknek geometriai mezt adtak és ez által megteremtették a *geometriai algebrát*. A III. könyv a kört, a IV. pedig a körbe és a kör köré írt idomokat tárgyalja. Az V. könyv az aránylatok tana, melyet már Eudoxus tárgyalt egész általánosságban. Bár ennek a könyvnek az anyaga is lényegében algebra, mégis beletartozik a síkmértanba, mert egyrészt az alakja geometriai, másrészt pedig előkészítésül szolgál a VI. könyvnek, mely az aránylatoknak főképen a hasonló idomokra vonatkozó alkalmazását foglalja magában.

A második csoportot alkotja a következő három arithmetikai könyv. Ezek közül a VII. könyv a közös osztót és a legnagyobb közös osztót, továbbá azokat a tételeket tárgyalja, melyek a számok oszthatóságára vagy nem oszthatóságára vonatkoznak, ha azokat különböző műveletekkel változtatjuk. Ugyancsak e könyvben találjuk a relativ primszámok különböző tételeit. A VIII. és IX. könyv anyaga legnagyobbrészt a mértani haladvánnyal foglalkozik antik alakjában: mint folytonos aránylattal.

Különálló könyv a X., mely az *Elemek*nek legterjedelmesebb könyve. Euklides ebben összegyüjtötte mindazt, amit Plato iskolájában, főleg annak egyik tagja, Theaitetos az összemérhetetlen mennyiségekről megállapított.

A negyedik csoportba végre tartozik a XI., XII. és XIII. könyv, melyeknek tárgya a testmértan.

Euklides 13 könyvéhez idővel még két könyv csatlakozott, melyek a szabályos testeket tárgyalják. Az első ezek közül alexandriai Hypsikles, a Kr. e. II. században élő csillagász műve; a másodikat is sokáig Hypsikles munkájának tartották, ujabb kutatók azonban arra a meggyőződésre jutottak, hogy azt damaszkuszi Damascius irta a Kr. u. VI. század első felében.

*

Euklides a mathematikai anyagot összes könyveiben mind tartalmi elrendezés, mind külső alak tekintetében egyöntetüen dolgozta fel. Minden könyv elején vagy legalább is minden csoport első könyvének elején *definició*kat találunk. A hat első könyv mindegyikének megvannak a maga definiciói; a VII. könyv definiciói a VIII. és IX. könyvnek is szólnak; a X. könyvben ismét az ebben szükséges elnevezéseket és alapfogalmakat találjuk meg, a XI. könyv definiciói viszont a XII. és XIII. könyv anyagához is tartoznak. Az I. könyvben azonban a definiciók után még *posztulátumok*kal és *axiomák*kal ismerkedünk meg, melyekre az egész mű anyaga támaszkodik. A tulajdonképeni mathematikai anyag pedig *feladatok* alakjába van foglalva, melyek, hol bizonyos összefüggésben, hol pedig mint egymagukban álló szerkesztések avagy tételek következnek egymás után.

A definiciók.

A szigorú kritika Euklides nagy művéből kiválóan a definiciókat és ezek közül is főleg az I. könyv definicióit vette boncoló kése alá és tett is ezekben legtöbbször erős kifogásokat. Euklides definicióit a néha kissé skolasztikus izü kritika egyszer-másszor már nagyon is élesen itélte el, felvetve ellenük azt, hogy legtöbbje negativ természetü és meg sem mondja azt, amit tulajdonképen feladatául kitüzött magának

A definiciók értékéhez mindenesetre szó fér. Nem lehet tagadni, hogy egyik-másik nem is határozza meg az illető dolgot, hanem csak egy-egy (néha tényleg csak negativ) tulajdonságát említi fel (mint pl. mindjárt az I. könyv I. definiciója: *pont az, a minek nincs része;* hasonlók ehhez a vonal és a lap meghatározásai is); találunk viszont nagyon is bőbeszédű és felesleges dolgokat is tartalmazó definiciókat (mint pl. a XVIII., mely felemlíti, hogy a félkör középpontja ugyanaz, a melyik a köré); vannak továbbá kissé homályos definiciók is, melyeknek értelme csak bizonyos magyarázatok után világlik ki (mint pl. a IV., mely szerint *egyenes vonal az, amelyik a benne elhelyezett pontjain egyenlőképen fekszik;* ugyanilyen a VII., mely a sík lapról szól).

Ujabb időben azonban Euklides definicióival szemben mind enyhébb felfogás kezd érvényesülni, mely szem előtt tartja azt, hogy teljesen kifogástalan definició megszerkesztése tulajdonképen nagyon nehéz, és nem ritkán annál nehezebb, minél elemibb és egyszerübb az illető dolog. Legtöbbször meg kell elégednünk, ha valamely dologról csak bizonyos jellemző tulajdonságokat vagyunk képesek kiemelni és esetleg teljesen le kell mondanunk arról, hogy valamely dologról csakis puszta szavak segitségével teljes fogalmat nyujtsunk. Ennek az enyhébb és mindenesetre helyesebb felfogásnak már a XVIII. században akadt szószólója Joh. Heinr. Lambert személyében (élt 1728—1777), ki így nyilatkozott:

Hogy Euklides definicióit előrebocsátja és felhalmozza, az mintegy nomenklatura. Nem tesz annál egyebet, mint a mit pl. az órás vagy más mester tesz, amikor azzal kezdi, hogy inasával eszközeinek nevét ismerteti meg.

Mindenesetre legcélszerűbb, ha úgy fogjuk fel a dolgot, hogy Euklides előrelátásból és áttekinthetőség céljából a tárgyalandó anyagnak mintegy tartalomjegyzékét és a mértani elemek tulajdonságait akarta a definicióiban megadni.

A posztulátumok.

A definiciók után Euklides oly mértani tételeket említ fel, melyek a józan ész követelésén alapulnak és melyeket nem szükséges, de tulajdonképen nem is lehet bizonyítani; e tételeket, melyekre az anyag tárgyalásakor gyakran hivatkozik, *posztulátumok*nak, *követelmények*nek (αἰτήματα) nevezte.

Euklides posztulátumai szószerinti fordításban így szólnak:

I. Követeltessék, hogy minden ponttól minden ponthoz egyenes vonal vezettessék.

II. És a határolt egyenes irányában folytatólagosan meghosszabbíttassék.

III. És minden középpont körül minden sugárral kör rajzoltassék.

IV. És az összes derékszögek egymással egyenlők legyenek.

V. És, ha két egyenest metsző egyenes ugyanazon az oldalán két derékszögnél kisebb belső szögeket alkot, a két egyenes határtalanul meghosszabbítva, azon az oldalon találkozzék, melyen a szögek két derékszögnél kisebbek.

Nyilvánvaló, hogy ebben a fogalmazásban feltünik a logikai kapcsolat hiánya az öt posztulátum között, mert míg az első háromhoz még illik a bevezetés: «*követeltessék, hogy*», a IV. posztulátumhoz fűzve, nem egykönnyen látjuk be ennek az értelmét: «követeltessék, hogy az összes derékszögek egymással egyenlők legyenek»; ép oly kevéssé illik a bevezetés az V. posztulátumhoz.

Alexandriai Theon (élt a Kr. u. IV. század második felében) is megakadhatott ezen a nehézségen, mert valószínüleg ő vette el a posztulátumokból a IV. és V. pontot és helyezte azokat az axiomák közé X. és XI. axiomának.

Proklos is érezte ugyanezt a nehézséget, de azt hitte, hogy meg is oldja ezzel a magyarázattal:

A posztulátumok oly módon különböznek az axiomáktól, mint a feladatok a tantételektől; az előbbiek szerkesztéseket követelnek, melyeket mindenki könnyen elvégezhet, az utóbbiak tételeket, melyeket mindenki könnyen elfogad.

Ily magyarázat tényleg ráillik az első három posztulátumra, melyek kétségtelenűl szerkesztéseknek — bár nagyon is primitiv szerkesztéseknek — beillenek. Proklosnak ezt a magyarázatát természetesen csak Theonnak eljárása tette lehetségessé.

Kiderült azonban, hogy Euklides mégis mind az öt pontot mondotta ki az Αἰτήματα címe alatt. És itt nem lehet tagadni, hogy a fordító kényszerhelyzetbe kerül és kénytelen az eredeti fogalmazásban változtatásokat tenni, ha a posztulátumok összefűggésének értelmét is akarja visszaadni. Mert nyilvánvaló, hogy csakis a szavak alakjaihoz való ragaszkodás hozza ellentétbe az öt pont bevezető mondatát az öt pont tartalmával.

Peyrard, az *Elemek* francia fordítója le is rázta a szavak nyügét: egyszerüen elhagyta a «követeltessék, hogy» bevezetést, a IV. és V. posztulátumot pedig indicativusban fejezte ki. Hasonló eljárással találkozunk a legtöbb angol fordításban is.

Összhangot azonban úgy is hozhatunk a bevezető mondat és az öt pont tartalma közé, ha egyszerüen a posztulátum értelmére támaszkodunk, hogy ugyanis bizonyos tényeket, állításokat, tételeket bizonyítás nélkül is igazságoknak elfogadunk (követeljük azok elismerését, elfogadását) és ennek alapján az öt posztulátum elé ezt a bevezető mondatot tesszük: «*bizonyos, hogy*»; ez azután csak igen csekély alaktani változtatásokat von maga után a posztulátumok szövegében.

Az axiomák.

Euklides ezeket így nevezte: κοιναὶ ἔννοιαι (közös eszmék), későbbi görög irók az ἀξιώματα szót használták ezen a helyen. Az axiomák bizonyos, igen egyszerü igazságok, melyeket ép oly kevéssé kell vagy lehet bizonyítani, mint a posztulátumokat; ennélfogva nincs is az axiomák és posztulátumok között lényegesebb különbség, bár időnkint tettek kisérleteket, ilyet megállapitani, ami azonban mindig erőltetett dolognak bizonyult.

Proklos a posztulátumokat szerkesztéseknek, az axiomákat tételeknek minősítette (l. feljebb), de kénytelen volt a IV. és V. posztulátumot az axiomák közé besorozni. Mások hajlandók voltak a posztulátumokat csupán mértani, az axiomákat pedig általános mennyiségtani tételeknek nevezni, de akkor az egyik axiomát (két egyenes nem zár be területet) a posztulátumokhoz kellett csatolni, miképen az több kéziratban, nevezetesen a vatikáni kéziratban is, tapasztaljuk. Max Simon, az *Elemek* hat első könyvének egyik német fordítója ezt a különbséget teszi: a posztulátumok a szemlélet alaptényei, az axiomák pedig a logika alaptényei; tetszetős szavaknál egyebet azonban ő sem igen nyujt e megkülönböztetésben.

Az euklidesi forma.

A definiciók, posztulátumok és axiomák után Euklides végre áttér a tulajdonképeni anyagra, melyet önálló feladatokban (πρότασις, propositio) tárgyal. E feladatok kétféle természetűek: vagy *igazi feladatok, problémák* vagy pedig *tantételek, theorémák.* Mindkettőnél szigorúan megtartja azt a módot, melyet azóta általánosan *euklidesi formá*nak neveznek és mely abban áll, hogy mindenekelőtt kimondja a problémát vagy a theorémát, azután megadja a megfejtést, illetőleg a bizonyítást, ezután pedig kivétel nélkül hozzáfüggeszti a záradékban a problémánál: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι (quod oportebat fieri, ezt kellett elvégeznünk), a tantételeknél pedig: ὅπερ ἔδει δεῖξαι (quod erat demonstrandum, ezt kellett bebizonyítanunk).

A megfejtés, vagy a bizonyítás nagyon beható, a legapróbb részletekre kiterjeszkedve. Euklides úgy ír, hogy a laikus is minden előtanulmány nélkül megérti; a levezetés lassu lépésekben halad előre, ugrások nélkül, biztosan, meggyőzően.

Az euklidesi módszer és forma részletesebb ismertetése céljából rögtön az I. könyv 1. feladata kinálkozik legalkalmasabb példának:

α'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ez tehát a πρότασις, vagyis *a feladat* (más esetekben: *a tantétel*) *kimondása.* Következik az ἔκθεσις (expositio), *az adatok megállapítása:*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB.

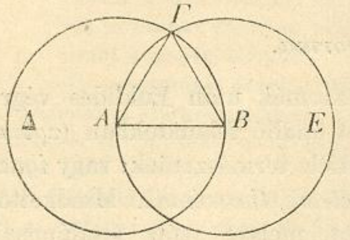
Az ezeket követő lépés a διορισμός (determinatio), *a feladat meghatározása* az adatok alkalmazásával:

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ezt azonban a későbbi feladatokban Euklides maga is rendesen elhagyta.

A probléma lényeges része a κατασκευή (constructio), *a szerkesztés* (mely azonban a tantételeknél természetesen elesik):

Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.



Mind a problémának, mind a tantételnek legfontosabb és legtanulságosabb része az ἀπόδειξις (demonstratio), *a bizonyítás:*

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τά δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Az utolsó rész végre a συμπέρασμα (conclusio) *a záradék,* mely a bizonyítás után kimondja még egyszer a feladatot vagy a tantételt:

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Kéziratok.

Euklides eredeti kézirata, melyet az alexandriai Múzeum könyvtárában őriztek, elveszett; valószínüleg elégett a könyvtárral együtt. Sokan másolták ugyan a kéziratot, de idővel a szöveg tetemes változásokon ment át. Főleg alexandriai Theon engedett meg magának sok önkénykedést Euklides művének kommentáros kiadásában, amennyiben sokat változtatott, hozzácsatolt, össze-vissza cserélgetett, javítgatott a javításra alig szoruló műben. És utóbb épen ez a nagy igényekkel fellépő kiadás szorította ki a többi kéziratot a kéziratpiacról. Körülbelül egy századdal Theon után Proklos szintén kommentárt írt Euklides művének legtöbb könyvéhez; kár, hogy csak az *Elemek* I. könyvéhez tartozó kommentár maradt meg.

A középkorban Euklides művét jó ideig csak hézagos kivonatok révén ismerték a kolostorokban, később pedig a Keletre került görög kéziratok arab fordításaiból készült latin átdolgozásai nyomán.

A renaissance-kor szellemi életének hullámai az *Elemek* görög kéziratait is felszinre hozták, melyek közül a legnevezetesebbeket a következőkben ismertetjük.

A vatikáni kézirat (190. sz.). Ez a kézirat a IX. század végéről vagy a X. század elejéről való; kiváló becsét az adja, hogy oly még régibb kéziratról másolták, mely régibb a Theon-féle kiadásnál, ennélfogva ebből a kéziratból meg lehetett határozni Theon változtatásait. A vatikáni kézirat magában foglalja az *Elemek* tizenhárom könyvét; nyomban ezek után következnek az *Adatok* és csak azután az *Elemek* XIV. és XV. könyve. A vatikáni kéziratot I. Napoleon 1808-ban Párisba vitette, 1814-ben azonban visszakerült a Vatikánba.

Az oxfordi kézirat a Bodley-könyvtárban szintén a IX. század végéről való.

A firenzei kézirat a Laurenzianában a X. századból származik.

A párisi 1038. számu kézirat (Bibliothèque Nationale) hiányos, amennyiben csak az *Elemek* II. könyvének 8. feladatával kezdődik; magában foglalja azonban az *Adatok*at is. A XI. század kezdetén irhatták és valaha a Vatikánban volt; Párisba a 190. számu vatikáni kézirattal együtt került 1808-ban és ott is maradt.

A bécsi kézirat a XI. vagy XII. századból eredhet és XIII. századbeli kiegészítésekkel fejeződik be.

A *párisi 2466. számu kézirat* az *Elemek* tizenhárom könyvét foglalja magában és a XII. századból való lehet.

A párisi 2344. számu kézirat szintén az *Elemek* tizenhárom könyvét tartalmazza és ugyancsak XII. századbeli eredetü lehet.

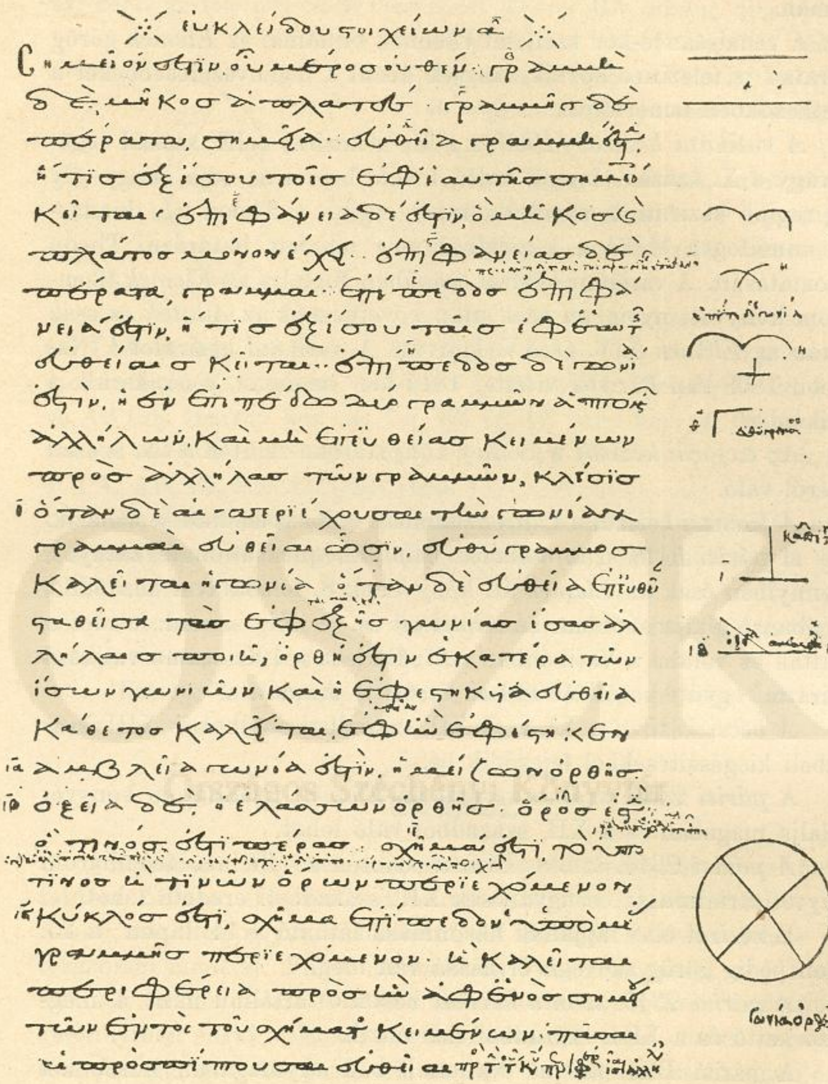
E kézirat első lapjának hasonmása látható a 14. lapon; a 15. lapon pedig görög szövegü olvasása van meg.

A párisi 2345. számu kézirat hasonló tartalmu mint a megelőző kettő és a XIII. századból származik.

A párisi Bibliothèque Nationale-ban egymagában huszonkét kézirat van.

*

Noha Euklides művét sűrün másolták, szerencsére aránylag kevés hiba csúszott a másolatokba. Itt-ott található csupán szavak elcserélése, kihagyása, esetleg egy-egy szó betolása, minek folytán a szövegkritikának nem sok dolga akadt Euklides művénél. Ez termé-


εὐκλείδου στοιχείων α΄
Σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν. γραμμὴ
δὲ μῆκος ἀπλατές. γραμμῆς δὲ
πέρατα σημεῖα. εὐθεῖα γραμμή ἐστιν
ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις
κεῖται. ἐπιφάνεια δέ ἐστιν ὃ μῆκος
καὶ πλάτος μόνον ἔχει. ἐπιφανείας δὲ
πέρατα γραμμαί. ἐπίπεδος ἐπιφά-
νειά ἐστιν ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς
εὐθείαις κεῖται. ἐπίπεδος δὲ γωνία
ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων
ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων
πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις
ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν
γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος
καλεῖται ἡ γωνία. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν
σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλ-
λήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν
ἴσων γωνιῶν καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα
κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.
ια ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.
ιβ ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς. ὅρος ἐστὶν
ὅ τινός ἐστι πέρας. σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό
τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.
ιε κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς
γραμμῆς περιεχόμενον ἣ καλεῖται
περιφέρεια πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου
τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι
αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ...

A 2344. sz. párisi kézirat első lapjának hasonmása.

Εὐκλείδου στοιχείων ᾱ

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν. Γραμμὴ
δὲ μῆκος ἀπλατές. Γραμμῆ δὲ
πέρατα σεμεῖα. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν,
ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις
κεῖται. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ
πλάτος μόνον ἔχει. Ἐπιφανείας δὲ
πέρατα γραμμαί. Ἐπιπεδος ἐπιφά-
νειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς
εὐθείας κεῖται. Ἐπίπεδος δὲ γωνία
ἐστιν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων
ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμὲνων
πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.
Ὅθαν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν
γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος
καλεῖται ἡ γωνία. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν
σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλ-
λήλαις ποιῆ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν
ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα
κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.
Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζον ὀρθῆς.
Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς. Ὅρος ἐστίν,
ὅ τινός ἐστι πέρας. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό
τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.
Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς
γραμμῆς περιεχόμενον ἣ καλεῖται
περιφέρεια πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου
τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένον πᾶσαι
αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν
ἴσαι ἀλλήλαις

A 2344. sz. párisi kézirat első lapjának olvasása
(az interlineáris és marginális jegyzetek nélkül).

szetszerűen a mathematika egyszerű nyelvezetével jár. Nagyobb változtatások azonban azokkal az elhelyezésekkel jártak, melyek főleg alexandriai Theon önkényes eljárása folytán támadtak. Innen van az, hogy főleg a posztulátumok és axiomák elrendezésében vannak különbségek.

Egyebekben a kéziratok csak inkább alaki dolgokban és nem lényegben különböznek egymástól. Így többek között egyes kéziratokban megvannak, másokban viszont hiányzanak az egyes részek címei (mint: definiciók, posztulátumok, stb.); a legtöbb kéziratban a feladatok nincsenek megszámozva, másokban még az is meg van jelölve, vajjon a feladat probléma-e avagy tantétel; végre pedig több kevesebb tagoltságot találunk a feladatok egyes részeiben.

Euklides maga valószínűleg nem számozta meg a feladatokat, amire az is mutat, hogy valamely későbbi feladatban mindig teljes szövegében idézi azt az előbbi feladatot, (esetleg posztulátumot vagy axiomát), melyre hivatkozik.

Az Elemek latin és görög kiadásai.

Az *Elemek* egyes részeinek két arab fordításáról is tudunk. Az egyiket egy Hadzsadzs ibn Juszuf ibn Matar nevű arab tudós végezte első ízben Arrasid kalifa idejében, másodízben pedig Almamun kalifa (mint ilyen 813—833) parancsára. A másik fordítást pedig az Ibadok keresztény arab törzséhez tartozó Hunain ibn Izsák felügyelete alatt ennek fia Abù Jakúb Izsák ibn Hunain csinálta meg a IX. század végén.

Egy bathi Atelhart nevü szerzetes a XII. század elején a Keletre utazott, hogy az arab nyelvet elsajátítsa; ez arra tette képessé, hogy egy (eddigelé ismeretlen) arab Euklides-forditásból az *Elemek* első latin átdolgozását elkészítse (1120 táján).

Úgy látszik, ugyanaz az arab átdolgozás, melyet bathi Atelhart használt, szolgált alapul novarrai Johannes Campanusnak, ki a XIII. század közepe táján az *Elemek* latin kiadását készítette el; egyszersmind ő csatolta az *Elemek* 13 könyvéhez a nem euklidesi XIV. és XV. könyvet is.

Ezt a Campanus-féle latin átdolgozást adta ki nyomtatásban először az augsburgi születésü, de Velencében egy időre letelepedett Erhardus Ratdolt nevű nyomdász 1482-ben Velencében; ez volt egyszersmind a legelső nyomtatvány, melyben mathematikai ábrákat lehet találni.

A mű teljes címe:

Praeclarissimum opus elementorum. Euclidis megarensis una cum commentis Campani perspicacissimi in artem geometriam incipit feliciter.

A címből máris látjuk, hogy Ratdolt az alexandriai Euklidest összetévesztette a megarai Euklidessel. De tartalomra nézve is még messze áll ez a kiadás az *Elemek*től, mert Campanus sok helyen megtoldotta és kiegészítette Euklides tételeit. Campanus átdolgozása uj kiadásokat ért el 1486-ban Ulmban (Regernél) és 1491-ben Baselben (Magister Leonardonál), majd pedig 1500 után megváltoztatott szöveggel.

A velencei Bartolomeo Zamberti fordította elsőnek közvetlenül görög kéziratból az *Elemek*et latinra. Ezt a latin fordítást 1500-tól 1505-ig adta ki. Zamberti szintén a megarai Euklidesnek tulajdonította még az *Elemek*et, de hibáktól mentesebb munkát nyujtott a Campanus-féle kiadásnál, ami természetesen a közvetlen fordítással együtt járt.

Luca Paciuolo 1509-ben Velencében az *Elemek*nek egy harmadik latin kiadásában ismét Zamberti álláspontjára helyezkedett. Luca Paciuolo oly imádója volt Euklidesnek, hogy 1508. augusztus 11-ikén a velencei S. Bartolomeo-templomban egy bevezető prédikáció után az *Elemek* V. könyvét olvasta fel és magyarázta.

Az *Elemek*nek egy negyedik latin kiadását főleg Zamberti nyomán Jacques Lefèvre francia tudós 1516-ban rendezte Michael Pontanus segédkezésével a párisi Stephanus-féle nyomdában; ezt a kiadást a századok folyamán még számtalan uj kiadás követte.

Az *Elemek* latin kiadásai közül még megemlítendők Federigo Commandino (élt 1509—1575) 1572-iki pesaroi és Christophorus Clavius (élt 1537—1612) 1574-iki római kiadása. Clavius már nem téveszti össze az *Elemek* szerzőjét a megarai Euklidessel; *itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo Philosopho longe alius est,* mondja a bevezetésben.

Az *Elemek első görög kiadása* a Simon Grynæus-féle, mely 1533-ban jelent meg Baselben. Grynæus ezt a kiadást két görög kézirat alapján rendezte; az egyiket Velencéből, a másikat Párisból kapta. A kiadás ezenkívül még Theon és Proklos kommentárjait foglalta magában, melyek közül az utóbbit egy oxfordi kézirat alapján készíthette el.

A kiadás teljes címe ez:

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ στοιχείων, βιβλ. ιε' ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν. Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον, ἐξηγημάτων τοῦ Πρόκλου βιβλ. δ'. Adjecta præfatiuncula, in qua de disciplinis Mathematicis nonnihil. (Sim. Grynæus). Bas(ileæ) apud J. Hervag mense Septembri 1533.

Ennek a kiadónak, mint az akkori kornak általában, az volt a véleménye, hogy Euklides csak a feladatokat hagyta ránk irásban és hogy a bizonyítások meg az ábrák Theontól valók; azért minden bizonyítás elé oda is tette Theonnak, mint szerzőnek a nevét. Ugyanily felfogású volt még egy latin kiadás is, a Caianus-féle (Roma, 1545), mely csak a feladatokat nyomtatta ki, mint Euklides egyedüli tulajdonát, a bizonyításokat és ábrákat pedig kihagyta.

Egy görög és latin nyelvű kiadást Stephanus Gracilis rendezett 1557-ben.

David Gregory 1703-ban kiadta Oxfordban az *Elemek* tizenöt könyvét és az *Adatok*at görög és latin nyelven. Gregory e kiadáshoz főleg Commandino latin fordítását használta fel, de azonkívül a Grynæus-féle kiadásra is támaszkodott. A kiadásnak, mely majdnem két századon át *editio optima* néven volt ismeretes, ez volt a címe:

Euclidis que supersunt omnia (Græce et Lat.) Ex recens. Dav. Gregorii Oxonii e theatro Sheldon 1703.

Robert Simson, glasgowi tanár 1756-ban az *Elemek* hat első, XI. és XII. könyvének latin fordítását adta ki, mely kiadás annyiban nevezetes, hogy Simson a Grynæus-féle nézettel szemben azt a véleményt vallotta, hogy a bizonyítások szövegét is Euklides irta, de ezeket Theon többé-kevésbbé módosította, illetőleg elrontotta. Az ő törekvése az volt, hogy Euklides művét Commandino latin fordítása szerint kiadja, a bizonyításokat Theon rontásaitól megtisztítsa, az általa valószínüleg kihagyottakat helyreállítsa, szóval Euklides eredeti szövegét lehetőleg visszaállítsa. Hogy Simson mily helyesen járt el, azt a későbben felfedezett vatikáni kézirat teljesen igazolta.

1814—1818 között jelent meg az *Elemek* negyedik szövegkiadása, melyet F. Peyrard készített el és melyhez latin és francia fordítást is csatolt. Ez az első kiadás a vatikáni kézirat alapján, melyen kívül még 22 kézirat állott Peyrard rendelkezésére. A gondos és nagybecsű kiadásban az *Adatok* is megvannak.

Az ötödik nevezetesebb görög kiadás Augusttól való (Berlin, 1826—1829; 13 könyv.).

Az *Elemek* legtökéletesebb és talán már minden kétséget eloszlató szövegkiadását végre J. L. Heiberg bocsátotta közre 1883—1888 között a lipcsei Teubner-cégnél latin fordítással egyetemben. H. Mengevel együtt ugyanott Euklides összes fenmaradt műveit adta ki.

Az Elemek élő nyelveken.

Az *Elemek* olaszul jelentek meg először élő nyelven; Nicolò Tartaglia végezte ezt a fordítást az *Elemek* latin kiadása révén 1543-ban.

1555-ben jelent meg az *Elemek* VIII. és IX. könyve Scheybel német fordításában; 1562-ben adta ki Wilhelm Xylander (Holtzmann) az első hat könyvet németül. Több töredékes és legnagyobbrészt tökéletlen kiadás után Joh. Fried. Lorenz értékesebb német fordítása következett 1781-ben. Ennek a fordításnak 3., 4. és 5. kiadását Carl Brandan Mollweide rendezte (1809, 1818, 1824.)

Az első francia fordítás Pierre Forcadel munkája; az öt első könyv 1564-ben, a VII. és IX. könyv 1566-ban jelent meg.

Az első angol kiadást Billingslai készítette 1570-ben. Az egyedüli szöveghű angol fordítás Jam. Williamsontól való (1781—1790). Az angolok még manapság is túlnyomóan Euklides nyomán végzik a középiskolai geometriai tanítást; nagyszámú iskolakönyveik azonban mégsem Euklides-fordítások, hanem kisebb-nagyobb önkénnyel végzett átdolgozások.

Spanyol fordítást Rodrigo Zamorano adott ki 1576-ban Sevillában az *Elemek* hat első könyvéről.

1594-ben pedig Rómában megjelent nyomtatásban az *Elemek*nek Naszir Eddin által készített arab átdolgozása.

A XVII. század első felében Euklidest már Kinában is ismerték egy kivonat révén, melyet Giulio Alessi, jezsuita hittérítő készített az *Elemek* hat első könyvéből kinai nyelven (ezt a fordítást Wylie egészítette ki 1857-ben az alkirály kívánságára).

A XVIII. és XIX. század folyamán megjelentek még orosz, lengyel, svéd, dán, hollandi és újgörög fordítások.

Az *Elemek* magyar fordítását Brassai Sámuel (1800—1897) adta ki 1865-ben a Magy. Tud. Akadémia megbízásából. Brassai fordítása alapjául az August-féle szövegkiadást vette, mivel az oxfordi Gregory-féle kiadás magyar földön nem volt található; az *Elemek* 13 könyvének leforditása után Bécsbe ment, hol a császári könyvtárban kéziratát az oxfordi kiadással még egyszer összehasonlította és ugyanabból az Augustéban hiányzó XIV. és XV. könyvet is leforditotta. Egyszersmind Peyrard kiadásával is összevetette, úgy hogy a legmegbizhatóbb alapokra támaszkodva mutathatta be Euklidest a magyar közönségnek.

AZ

ELEMEK

ELSŐ HAT KÖNYVE.

I. KÖNYV.

Definiciók.

I. Pont az, aminek nincs része.

II. A vonal szélesség nélkül való hosszúság.

III. A vonal végei pontok.

IV. Egyenes vonal az, amely a benne elhelyezett pontjain egyenlőképen fekszik.

V. Lap az, aminek csak hosszúsága és szélessége van.

VI. A lap végei vonalok.

VII. Sík lap az, amely a benne elhelyezett egyenesein egyenlőképen fekszik.

VIII. Síkszög a síkban egymást érő, nem ugyanabban az egyenesben fekvő vonal egyikének a másikához való hajlása.

IX. Amikor a szöget alkotó vonalok egyenesek, a szöget egyenesvonalúnak nevezzük.

X. Amikor egy egyenes egy másik egyenesen úgy áll, hogy a mellékszögek egymással egyenlők, az egyenlő szögek mindegyike derékszög és azt mondjuk, hogy az egyenes merőleges arra az egyenesre, amelyen áll.

XI. Tompa szög az, amely nagyobb a derékszögnél.

XII. Hegyes pedig az, amely kisebb a derékszögnél.

XIII. Határ az, ami valaminek vége.

XIV. Idom az, amit egy vagy több határ körülfog.

XV. A kör oly sík idom, melyet *egy* vonal körülfog (ezt kerületnek nevezzük), az idom belsejében fekvő egyik pontján át (a kör kerületéhez) húzott egyenesek egymással egyenlők.

XVI. Ezt a pontot a kör középpontjának nevezzük.

XVII. A kör átmérője a középponton át húzott és a kör kerülete által mindkét végén határolt egyenes, mely meg is felezi a kört.

XVIII. A félkör az az idom, melyet az átmérő és az általa elmetszett kerület körülfog. A félkör középpontja ugyanaz, amelyik a köré.

XIX. Egyenes vonalú idomok azok, melyeket egyenesek határolnak, a háromoldalúak azok, melyeket három, a négyoldalúak azok, melyeket négy, a sokoldalúak pedig azok, melyeket négynél több egyenes határol.

XX. A háromoldalú idomok közül az egyenlőoldalú háromszög az, melynek három egyenlő oldala van, az egyenlőszárú az, melynek csak két egyenlő oldala van, az egyenlőtlen oldalú háromszög pedig az, melynek három különböző oldala van.

XXI. Továbbá a háromoldalú idomok közül a derékszögű háromszög az, melynek egyik szöge derékszög, a tompaszögű az, melynek egyik szöge tompa szög, a hegyesszögű pedig az, melynek mind a három szöge hegyes szög.

XXII. A négyoldalú idomok közül a négyzet az, amely egyenlőoldalú és derékszögű, a téglalap az, mely derékszögű, de nem egyenlőoldalú, a rombosz az, amely egyenlőoldalú, de nem derékszögű, a romboid az, amelynek egymással szembenfekvő egyenlő oldalai és szögei vannak és amely sem nem egyenlőoldalú, sem nem derékszögű. A többi négyszöget pedig nevezzük el trapézeknek.

XXIII. Párhuzamosak azok az ugyanabban a síkban fekvő egyenesek, melyek seholsem találkoznak, bár ha mindkét végükön határtalanul meghosszabbitjuk is őket.

Posztulátumok.

I. Bizonyos, hogy minden ponttól minden ponthoz egyenes vonal húzható.

II. És a határolt egyenes a maga irányában folytatólagosan meghosszabbítható.

III. És minden középpont körül és minden sugárral kör rajzolható.

IV. És az összes derékszögek egymással egyenlők.

V. És ha két egyenest metsző egyenes ugyanazon az oldalán két derékszögnél kisebb belső szögeket alkot, a két egyenes határtalanul meghosszabbítva, azon az oldalon találkozik, melyen a szögek két derékszögnél kisebbek.

Ezt az V. posztulátumot a szakkritika méltán támadta meg és itélte el, mint Euklides nagy művének hibáját, «foltját». Az V. posztulátum ugyanis nem mehet posztulátum számba, mert semmiképen sem foglal magában oly alapigazságot, melyről vagy logikai belátás vagy közvetlen szemlélet alapján győződünk meg és melyet nem szükséges bizonyítani. Az V. posztulátum nagyon is bizonyításra szorul: helyessége csak akkor lesz nyilvánvalóvá, ha bebizonyítottuk, hogy a háromszögnek mind a három szöge együttvéve két derékszöggel egyenlő, két szöge ennélfogva kisebb két derékszögnél. Ebben a kapcsolatban tehát az V. posztulátum a háromszög szögeiről szóló tételnek megfordítása, mint ezt már Proklos is kimondta. De ez az utóbbi tétel sem posztulátum, hanem szintén bizonyításra szorul. Bizonyítani pedig csak úgy tudjuk, ha a háromszög valamelyik csúcsán át párhuzamost húzunk a szemközti oldallal és arra hivatkozunk, *hogyha két párhuzamos egyenest egy harmadik metsz, a váltó- és a megfelelő szögek egyenlők.* És voltaképen ezt az utóbbi tételt kell alapigazságnak elfogadnunk, melyet egészen szigorúan úgy sem tudunk bizonyítani. El is fogadták már a pythagorasi iskola óta tapasztalati tételnek és így méltán feltünést keltett, amikor Euklides I. könyvének 29. feladatában ezt a szükségképen elfogadott tételt az ő sokkal kevésbbé belátható és szemléltető V. posztulátumának segítségével bizonyította. Már az Euklides korát követő első századok nagy mathematikusai, mint Geminos (Kr. e. I. század), Ptolemaios (Kr. u. II. század) és Proklos (Kr. u. V. század) feszegették az V. posztulátumot; a XIII. században az arab Naszir Eddin (élt 1201—1274) vette fel újra a fonalat egy művében, majd pedig Claviusnak 1574-ben megjelent tanulmánya óta majdnem szakadatlanul folyó irodalom tárgya lett az Euklides-féle V. posztulátum, mely egész új elméleteknek lett a kútforrása és idővel a mathematikának addig nem is sejtett terére (az abszolut vagy nem-euklidesi geometriára) vezetett, amelyen az úttörők jóformán csak a leglángeszübb mathematikusok, mint amilyen a mi hazánk nagy szülötte, Bolyai János (élt 1802—1860) is volt.

Axiomák.

I. Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.

II. És ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk, az egészek is egyenlők.

III. És ha egyenlőkből egyenlőket kivonunk, a maradékok is egyenlők.

IV. És ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk, az egészek nem egyenlők.

V. És egyenlőknek a kétszeresei egyenlők egymással.

VI. És egyenlőknek a felei egyenlők egymással.

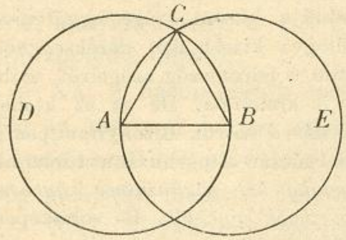
VII. És amik egymásra esnek, egyenlők egymással.

VIII. És az egész nagyobb a részénél.

IX. És két egyenes nem zár be területet.

1.

Adott határolt egyenesre szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget.



Legyen az adott határolt egyenes AB. Tehát az AB egyenesre szerkesszünk egyenlőoldalú háromszöget.

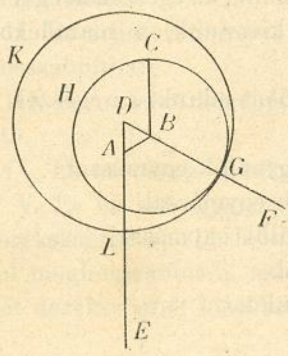
Rajzoljuk az A középpont köré az AB sugárral a BCD kört, viszont a B középpont körül a BA sugárral az ACE kört, és a C pontból, melyben a körök egymást metszik, húzzuk meg az A és B pontokhoz a CA és CB egyeneseket. És minthogy az A pont a CDB kör középpontja, AC egyenlő AB-vel. Viszont, minthogy B pont a CAE kör középpontja, BC egyenlő BA-val. De azt is bebizonyítottuk, hogy CA egyenlő AB-vel. Ennélfogva mind CA, mind CB egyenlő AB-vel. Amik pedig ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők (I. axioma). Ennélfogva CA egyenlő CB-vel. Tehát mind a három: a CA, az AB és a BC, egymással egyenlő.

Az ABC háromszög tehát egyenlőoldalú. És megszerkesztettük az adott határolt AB egyenesre.

Adott határolt egyenesre tehát egyenlőoldalú háromszöget szerkesztettünk. Ezt kellett elvégeznünk.

2.

Adott pontból vonjunk adott egyenessel egyenlő egyenest.



Legyen az adott pont A, az adott egyenes pedig BC.

Tehát az A pontból vonjunk az adott BC egyenessel egyenlő egyenest.

Húzzuk meg az A pontból a B ponthoz az AB egyenest (I. poszt.) és szerkesszük erre a DAB egyenlőoldalú háromszöget (1.), hosszabbítsuk meg a DA és DB egyeneseket AE és BF felé, rajzoljuk B középpont köré BC sugárral a CGH kört és viszont D középpont köré DG sugárral a GKL kört (III. poszt.).

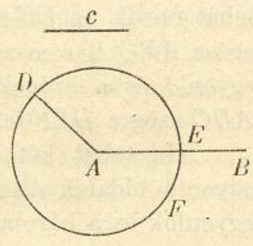
Minthogy a B pont a CGH kör középpontja, BC egyenlő BG-vel. Viszont, minthogy D pont a GKL kör középpontja, DL egyenlő DG-vel, belőlük DA egyenlő DB-vel. Tehát az AL maradék egyenlő a BG maradékkal (III. axioma). De azt is bebizonyítottuk, hogy BC egyenlő BG-vel. Ennélfogva mind AL, mind BC egyenlő BG-vel. Amik pedig ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők (I. axioma). Ennélfogva AL egyenlő BC-vel.

Az adott A pontból tehát a BC egyenessel egyenlő AL egyenest vontunk. Ezt kellett elvégeznünk.

Ez a feladat érdekesen megvilágítja azt a szigorú következetességet, melylyel Euklides rendszerét felépítette. Ha ugyan pusztán a feladatot tekintjük, bizonyára körülményes és teljesen fölösleges munkának tartjuk az ABD egyenlőoldalú háromszög megszerkesztését és egyszerűen A pont körül a BC sugárral kört rajzolnánk. Ha azonban Euklides módszerének mélyére tekintünk, csakhamar belátjuk, hogy ő csakis az I. könyve elején előrebocsátott definiciókra, posztulátumokra és axiomákra támaszkodott; az egyenes vonalokat kizárólagosan *elforgatás* segítségével helyezte el, az elforgatás megengedhetőségét pedig a XV. definició, a III. posztulátum, a III. axioma és az 1. feladat révén mutatta ki. Adott *egyenesnek* közvetlen *transzponálását* tehát nem vette igénybe.

3.

Két adott, nem egyenlő egyenes közül vágjunk el a nagyobbikból a kisebbikkel egyenlő egyenest.



Legyen a két adott, nem egyenlő egyenes AB és c, ezek közül legyen a nagyobbik az AB. Tehát a nagyobbik AB egyenesből vágjuk el a kisebbikkel egyenlő c egyenest.

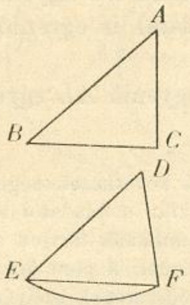
Fektessük az A ponthoz a c vonallal egyenlő AD-t (2.). És rajzoljuk meg az A középpont körül az AD sugárral a DEF kört (III. poszt.).

És minthogy A pont a DEF kör középpontja, AE egyenlő AD-vel. Azonban c is egyenlő AD-vel. Ennélfogva az AE, c mindegyike egyenlő AD-vel. Tehát AE is egyenlő c-vel.

Tehát a két adott, nem egyenlő AB és c egyenes közül a nagyobbik AB-ből a kisebbik c-vel egyenlő AE-t vágtuk el. Ezt kellett elvégeznünk.

4.

Ha két háromszögnek két-két egyenlő oldala és az egyenlő oldalok által közbezárt egyenlő szöge van, az alapok is egyenlők és a háromszögek is egyenlők, valamint egymással külön-külön egyenlők a szögek is, melyeket az egyenlő oldalok átfognak.



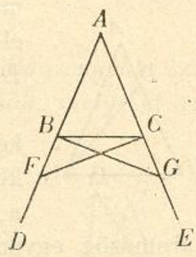
Legyen a két ABC, DEF háromszögnek, két AB, AC oldalával külön-külön egyenlő két DE, DF oldala; még pedig AB egyenlő DE-vel és AC egyenlő DF-fel és a BAC szög is egyenlő EDF szöggel. Azt mondom, hogy a BC alap is egyenlő az EF alappal és az ABC háromszög is egyenlő a DEF háromszöggel és a szögek is külön-külön egyenlők egymással, melyeket az egyenlő oldalok átfognak: az ABC szög egyenlő a DFE szöggel.

Mert ha az ABC háromszöget a DEF háromszögre illesztjük és az A pontot a D pontra helyezzük, az AB egyenest pedig DE-re, a B pont is ráesik az E-re, minthogy AB egyenlő DE-vel. Miután AB ráesik DE-re, az AC egyenes is ráesik DF-re, minthogy BAC szög egyenlő EDF szöggel. Tehát a C pont is ráesik F pontra, minthogy viszont AC egyenlő DF-fel. Azonban a B is ráesik az E-re. Ennélfogva a BC alap ráesik az EF alapra. Mert ha, a mikor BE-re, C pedig F-re esik, a BC alap nem esnék az EF-re, két egyenes területet zárna be. De ez lehetetlen (IX. axioma). A BC alap tehát ráesik az EF-re és vele egyenlő (VII. axioma). Ennélfogva az egész ABC háromszög ráesik az egész DEF háromszögre és vele egyenlő és a szögek is egymásra esnek és egyenlők egymással: az ABC szög a DEF-fel, az ACB pedig a DFE-vel.

Ha tehát két háromszögnek két-két egyenlő oldala és az egyenlő oldalok által közbezárt egyenlő szöge van, az alapok is egyenlők és a háromszögek is egyenlők, valamint a szögek is külön-külön egyenlők egymással, melyeket az egyenlő oldalok átfognak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

5.

Az egyenlőszárú háromszögben az alapon nyugvó szögek egyenlők egymással és ha az egyenlő egyeneseket meghosszabbítjuk, az alap alatt fekvő szögek is egyenlők egymással.



Legyen az egyenlőszárú ABC háromszögnek AB oldala egyenlő AC oldalával és hosszabbítsuk meg az AB, AC egyeneseket BD, CE felé. Azt mondom, hogy az ABC szög egyenlő az ACB szöggel, a CBD pedig a BCE-vel.

Mert vegyünk fel a BD-n bármily F pontot, a nagyobb AE-ből vágjuk el a kisebb AF-fel egyenlő AG-t (3.) és húzzuk meg az FC, GB egyeneseket.

Minthogy AF egyenlő AG-vel, AB pedig AC-vel, a két FA, AC egyenlő a két GA-val, AB-vel külön-külön. És a közös FAG szöget zárják be. Az FC alap tehát egyenlő a GB alappal, az AFC háromszög egyenlő az AGB háromszöggel és a szögek is egyenlők külön-külön, amelyeket az egyenlő oldalok átfognak (4.), az ACF az ABG-vel, az AFC pedig az AGB-vel. És minthogy az egész AF egyenlő az egész AG-vel, melyeknek AB-je és AC-je egyenlő, ennélfogva a BF maradék is egyenlő a CG maradékkal (III. axioma). Bebizonyítottuk pedig azt is, hogy FC egyenlő GB-vel. Így a két BF, FC egyenes a két CG, GB egyenessel külön-külön egyenlő. És a BFC szög is egyenlő a CGB szöggel és a közös alapjuk BC. Tehát a BFC háromszög egyenlő a CGB háromszöggel és a szögek is egyenlők külön-külön, melyeket az egyenlő oldalok átfognak (4.). Tehát az FBC egyenlő a GCB-vel, a BCF pedig a CBG-vel. Minthogy az egész ABG szög és az egész ACF szög egyenlőségét bebizonyítottuk, melyeknek CBG-je is egyenlő BCF-jével, ennélfogva az ABC maradék is egyenlő az ACB maradékkal. És ezek az ABC háromszög alapján nyugszanak. Bebizonyítottuk pedig azt is, hogy az FBC egyenlő a GCB-vel. És ezek az alap alatt vannak.

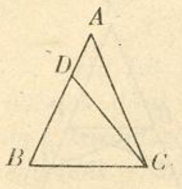
Tehát az egyenlőszárú háromszögben az alapon nyugvó szögek egyenlők egymással és ha az egyenlő egyeneseket meghosszabbítjuk, az alap alatt fekvő szögek is egyenlők egymással. Ezt kellett bebizonyítanunk.

6.

Ha egy háromszögben két szög egyenlő egymással, az egyenlő szögeket átfogó oldalok is egyenlők egymással.

Legyen az ABC háromszögnek ABC szöge egyenlő ACB szögével. Azt mondom, hogy az a AB oldal is egyenlő az AC oldallal.

Mert ha az AB nem egyenlő az AC-vel, egyikük nagyobb a



másiknál. Legyen a nagyobbik az AB; vágjuk el a nagyobb AB-ből a kisebbik AC-vel egyenlő DB-t (3.) és húzzuk meg DC-t.

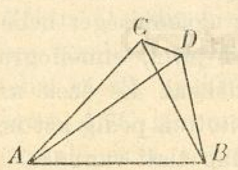
Minthogy DB egyenlő AC-vel és BC közös, a két DB, BC, egyenlő a két AC-vel, CB-vel különkülön és DBC szög egyenlő az ACB szöggel. Tehát a DC alap egyenlő az AB alappal és a DBC háromszög egyenlő az ACB háromszöggel (4.), a kisebbik a nagyobbikkal. De ez képtelenség. Ennélfogva az AB és az AC nem különböznek egymástól. Tehát egyenlők.

Ha tehát egy háromszögben két szög egyenlő egymással, az egyenlő szögeket átfogó oldalak is egyenlők egymással. Ezt kellett bebizonyitanunk.

Ez a tétel az 5. feladatban kimondott tétel megfordítása; bebizonyítása azonban független amazétól, mert Euklides emitt az ú. n. *apagogikus* (képtelenségre, *ad absurdum* vezető) bizonyítást alkalmazta.

7.

Ugyanarra az egyenesre ugyanazzal a két egyenessel különkülön egyenlő más két egyenes ugyanazokon a pontokon nem állítható úgy, hogy ezeknek ugyanazon az oldalon más metszési pontjuk volna, mint az első egyeneseknek.



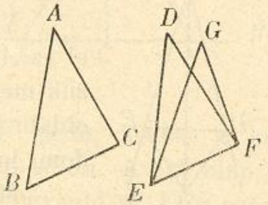
Mert, ha lehet, állítsunk ugyanarra az AB egyenesre ugyanazzal a két AC, CB egyenessel külön-külön egyenlő más két AD, DB egyenest más-más, C és D metszési pontokkal, úgy hogy CA egyenlő DA-val, melyeknek metszési pontja A, CB pedig egyenlő DB-vel, melyeknek metszési pontja B és húzzuk meg a CD-t.

Minthogy AC egyenlő AD-vel, az ACD szög is egyenlő az ADC-vel (5.). Nagyobb tehát az ADC a DCB-nél. Annál nagyobb tehát a CDB a DCB-nél. Viszont, minthogy CB egyenlő DB-vel, a CDB szög is egyenlő a DCB szöggel (5.). Bebizonyítottuk pedig, hogy annál nagyobb nála. De ez lehetetlen.

Tehát ugyanarra az egyenesre ugyanazzal a két egyenessel külön-külön egyenlő más két egyenes ugyanazokon a pontokon nem állítható úgy, hogy ezeknek ugyanazon az oldalon más metszési pontjuk volna, mint az elsőknek. Ezt kellett bebizonyitanunk.

8.

Ha két háromszögnek két oldallal külön-külön egyenlő két oldala és egyenlő alapja van, a szögek is egyenlők, melyeket az egyenlő egyenesek befognak.



Legyen a két ABC, DEF háromszögnek két AB, AC oldalával külön-külön egyenlő két DE, DF oldala; még pedig AB egyenlő DE-vel, és AC egyenlő DF-fel. És legyen a BC alap egyenlő az EF alappal. Azt mondom, hogy a BAC szög is egyenlő az EDF szöggel.

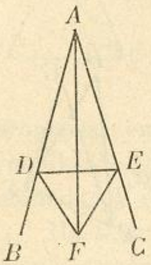
Mert ha az ABC háromszöget a DEF háromszögre illesztjük és a B pontot az E pontra helyezzük, a BC egyenest pedig az EF egyenesre, a C pont is ráesik az F-re, minthogy BC egyenlő EF-fel. Miután BC ráesik EF-re, BA, CA is ráesik ED-re, DF-re. Mert ha a BC alap ráesik az EF alapra, a BA, AC oldalok azonban nem esnek az ED, DF oldalokra, hanem eltérnek EG, GF mentén, ugyanarra az egyenesre, ugyanazzal a két egyenessel külön-külön egyenlő más két egyenes ugyanazokon a pontokon úgy állítható, hogy ezeknek más metszési pontjuk volna (7.). Ilyenek pedig nem állíthatók. Ha a BC alap ráesik az EF alapra, a BA, AC oldalok sem térhetnek el az ED, DF oldaloktól. Hanem egymásra esnek. Ennélfogva a BAC szög is összeillik EDF szöggel és vele egyenlő.

Ha tehát két háromszögnek két oldallal külön-külön egyenlő két oldala és egyenlő alapja van, a szögek is egyenlők, melyeket az egyenlő egyenesek befognak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

Euklides a 8. feladat tételének bebizonyítására a 7. feladat tételét használta fel. Ha azonban jobban szemügyre vesszük a két tétel lényegét, azt tapasztaljuk, hogy mindkettő egy és ugyanaz a tétel, mely röviden így fejezhető ki: ha két háromszögnek három oldala külön-külön egyenlő, a két háromszög egybevágó. Kár, hogy Euklides nem egyszerűbben és nem egy helyen adta közre az egybevágósági eseteket, hanem körülményes melléktételekkel keverve, szétszórva a 4., a 8. és a 26. feladatban; emellett még az egyik egybevágósági esetet (két oldal és az egyik oldallal szemben fekvő szög egyenlőségét) teljesen elejtette.

9.

Felezzünk meg adott egyenesvonalú szöget.



Legyen az adott egyenesvonalú szög BAC. Ezt felezzük meg.

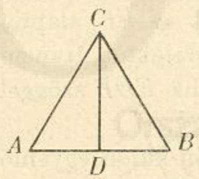
Vegyünk fel az AB-n bármily D pontot, vágjuk el az AC egyenesből az AD-vel egyenlő AE-t és húzzuk meg DE-t; szerkesszünk DE-re DEF egyenlő oldalú háromszöget és húzzuk meg AF-et. Azt mondom, hogy a BAC szöget megfelezi az AF egyenes.

Mert, minthogy AD egyenlő AE-vel, az AF pedig közös, a két DA, AF egyenlő a két EA-val, AF-fel külön-külön. És a DF alap is egyenlő az EF alappal. A DAF szög tehát egyenlő az EAF szöggel.

Tehát az adott egyenesvonalú BAC szöget megfelezi az AF egyenes. Ezt kellett elvégeznünk.

10.

Felezzünk meg adott határolt egyenest.



Legyen az adott határolt egyenes AB. Ezt az AB határolt egyenest felezzük meg.

Szerkesszük reá az ABC egyenlő oldalú háromszöget és felezzük meg az ACB szöget a CD egyenessel (9.). Azt mondom, hogy az AB egyenest megfelezi a D pont.

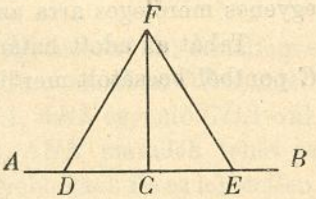
Minthogy AC egyenlő CB-vel, a CD pedig közös, a két AC, CD, a két BC-vel, CD-vel egyenlő külön-külön. És az ACD szög is egyenlő a BCD szöggel. Tehát az AD alap egyenlő a BD alappal (4.).

Tehát az adott határolt AB egyenest megfeleztük D-ben. Ezt kellett elvégeznünk.

11.

Adott egyenesnek adott pontjában emeljünk merőleges egyenes vonalat.

Legyen az adott egyenes AB, a benne fekvő pont pedig C. Az AB egyenesnek ebben a C pontjában emeljünk merőleges egyenes vonalat.



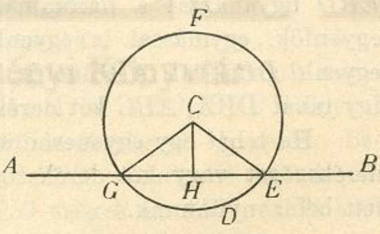
Vegyünk fel az AB-n bármily D pontot, vágjuk el a CD-vel egyenlő CE-t, szerkesszük meg DE-re az FDE egyenlő oldalú háromszöget és húzzuk meg FC-t. Azt mondom, hogy az adott AB egyenesre a benne fekvő adott C pontjában merőlegesen emelt egyenes vonal az FC.

Minthogy DC egyenlő CE-vel, a CF pedig közös, a két DC, CF egyenlő a két EC-vel, CF-fel külön-külön. A DF alap is egyenlő az FE alappal. Tehát a DCF szög is egyenlő az ECF szöggel. És ezek mellékszögek. A mikor pedig egy egyenes egy másik egyenesen úgy áll, hogy a mellékszögek egyenlők, az egyenlő szögek mindegyike derékszög (X. def.). Ennélfogva a DCF, FCE mindegyike derékszög.

Tehát az adott AB egyenesre a benne fekvő adott C pontjában emelt merőleges egyenes vonal a CF. Ezt kellett elvégeznünk.

12.

Adott határtalan egyenesre egy kivüle fekvő adott pontból bocsássunk merőleges egyenes vonalat.



Legyen az adott határtalan egyenes AB, a kivüle fekvő adott pont pedig C. Erre az adott határtalan AB egyenesre bocsássunk a kivüle fekvő, adott C pontból merőleges egyenes vonalat.

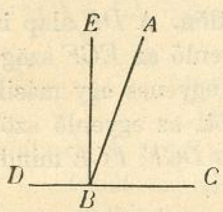
Vegyünk fel AB egyenesen kívül bármily D pontot, a C középpont köré CD sugárral rajzoljuk meg az EFG kört, felezzük meg az EG egyenest H-ban és húzzuk meg a CG, CH, CE egyeneseket. Azt mondom, hogy az adott határtalan AB egyenesre a kivüle fekvő adott C pontból bocsátott merőleges a CH.

Minthogy GH egyenlő HE-vel, HC pedig közös, a két GH, HC, egyenlő a két EH-val, HC-vel külön-külön. A CG alap is egyenlő a CE alappal. Tehát a CHG szög is egyenlő az EHC szöggel (8.) És ezek mellékszögek. Amikor pedig egy egyenes egy másik egyenesen úgy áll, hogy a mellékszögek egymással egyenlők, az egyenlő szögek mindegyike derékszög és azt mondjuk, hogy az egyenes merőleges arra az egyenesre, amelyen áll (X. def.).

Tehát az adott határtalan *AB* egyenesre a kívüle fekvő adott *C* pontból bocsátott merőleges a *CH*. Ezt kellett elvégeznünk.

13.

Ha egy egyenesen álló egyenes szögeket alkot, vagy két derékszöget vagy két derékszöggel egyenlő szögeket alkot.



Alkossa a *CD* egyenesre állított *AB* egyenes a *CBA, ABD* szögeket. Azt mondom, hogy a *CBA, ABD* szögek vagy derékszögek vagy két derékszöggel egyenlők.

Ha *CBA* csakugyan egyenlő *ABD*-vel, a kettő derékszög. Ha pedig nem, emeljük *B* pontban a *CD*-re merőleges *BE*-t (11.). Így tehát *CBE, EBD* két derékszög. És miután *CBE* a két *CBA, ABE* szöggel egyenlő, adjuk hozzá a közös *EBD*-t. Tehát a *CBE, EBD* egyenlő a három *CBA*-val, *ABE*-vel, *EBD*-vel. Másrészt, minthogy *DBA* a két *DBE*-vel, *EBA*-val egyenlő, adjuk hozzá a közös *ABC*-t. Tehát a *DBA, ABC* egyenlő a három *DBE*-vel, *EBA*-val, *ABC*-vel. Bebizonyítottuk pedig azt is, hogy *CBE, EBD* ugyanazzal a hárommal egyenlő. A mik pedig ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők (I. axioma). Tehát *CBE, EBD* egyenlő *DBA*-val, *ABC*-vel is. Azonban *CBE, EBD* két derékszög. Így tehát *DBA, ABC* két derékszöggel egyenlő.

Ha tehát egy egyenesen álló egyenes szögeket alkot, vagy két derékszöget vagy két derékszöggel egyenlő szögeket alkot. Ezt kellett bebizonyítanunk.

14.

Ha valamely egyenesnek egyik pontjához az egyenes mindkét oldalán úgy vonunk két egyenest, hogy ezek vele két derékszöggel egyenlő mellékszögeket alkotnak, akkor egy egyenesbe esnek ezek az egyenesek.

Alkossa valamely *AB* egyenesnek *B* pontjánál két *BC, BD* egyenes annak két oldalán a két derékszöggel egyenlő *ABC, ABD* mellékszögeket. Azt mondom, hogy *CB* és *BD* egy egyenesben vannak.

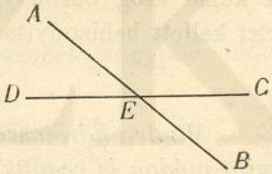
Mert ha *BC* és *BD* nincsenek *egy* egyenesben, legyenek *CB* és *BE egy* egyenesben.

Minthogy az *AB* egyenes a *CBE* egyenesen áll, ennélfogva az *ABC, ABE* két derékszöggel egyenlő (13.). Azonban *ABC, ABD* is két derékszöggel egyenlő. Így tehát *CBA, ABE* egyenlő *CBA*-val, *ABD*-vel. Vonjuk le a közös *CBA*-t. Az *ABE* maradék tehát az *ABD* maradékkal egyenlő, a kisebbik a nagyobbikkal. De ez lehetetlen. Ennélfogva *BE* és *CB* nincsenek *egy* egyenesben. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy más sincs *BD*-n kívül. Tehát *CB* és *BD egy* egyenesben vannak.

Ha tehát valamely egyenesnek egyik pontjához az egyenes mindkét oldalán így vonunk két egyenest, hogy ezek vele két derékszöggel egyenlő mellékszögeket alkotnak, akkor *egy* egyenesbe esnek ezek az egyenesek. Ezt kellett bebizonyítanunk.

15.

Ha két egyenes egymást metszi, a csúcsszögeket egymással egyenlőkké teszik.



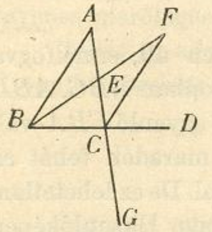
Messe egymást a két *AB, CD* egyenes *E* pontban. Azt mondom, hogy az *AEC* szög egyenlő a *DEB*-vel és a *CEB* az *AED*-vel.

Minthogy az *AE* egyenes a *CD* egyenessel a *CEA, AED* szögeket alkotja, a *CEA, AED* szögek két derékszöggel egyenlők (13.). Viszont, minthogy a *DE* egyenes az *AB* egyenessel az *AED, DEB* szögeket alkotja, az *AED, DEB* szögek két derékszöggel egyenlők. Bebizonyitottuk pedig, hogy a *CEA, AED* szögek is két derékszöggel egyenlők. Tehát a *CEA, AED* szögek az *AED, DEB* szögekkel egyenlők. Vonjuk ki a közös *AED* szöget. A *CEA* maradék tehát egyenlő a *BED* maradékkal. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy *CEB* és *DEA* is egyenlők.

Ha tehát két egyenes egymást metszi, a csúcsszögeket egymással egyenlőkké teszik. Ezt kellett bebizonyítanunk.

16.

Ha bármely háromszög egyik oldalát meghosszabbítjuk, a külső szög bármelyik belső és szembenfekvő szögnél nagyobb.



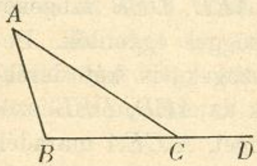
Legyen a háromszög ABC és hosszabbítsuk meg egyik BC oldalát D-ig. Azt mondom, hogy a külső ACD szög nagyobb a belső és szembenfekvő CBA, BAC szögek bármelyikénél.

Felezzük meg az AC-t E-ben és meghúzva a BE vonalat hosszabbítsuk meg azt F-ig és tegyük BE-vel egyenlővé EF-et; húzzuk meg FC-t és hosszabbítsuk meg AC-t G-ig. Minthogy AE egyenlő EC-vel, BE pedig EF-fel, a két AE, EB a két CE-vel, EF-fel egyenlő külön-külön. És az AEB szög egyenlő az FEC-vel. Mivelhogy csúcsszögek (15.). Az AB alap tehát az FC alappal egyenlő és az ABE háromszög egyenlő az FEC háromszöggel, valamint egymással külön-külön egyenlők a szögek is, melyeket az egyenlő oldalak átfognak (4.). A BAE tehát egyenlő az ECF-fel. Az ECD azonban nagyobb az ECF-nél. Az ACD tehát nagyobb a BAE-nél. Hasonlóképen a BC-t megfelezve bebizonyíthatjuk, hogy a BCG, vagyis az ACD nagyobb az ABC-nél.

Ha tehát bármely háromszög egyik oldalát meghosszabbítjuk, a külső szög bármelyik belső és szembenfekvő szögnél nagyobb. Ezt kellett bebizonyítanunk.

17.

Minden háromszögnek két szöge két derékszögnél kisebb, bármily módon is vegyük azokat.



Legyen a háromszög ABC. Azt mondom, hogy az ABC háromszögnek két szöge két derékszögnél kisebb, bármily módon is vegyük azokat.

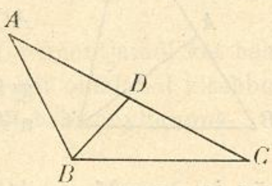
Hosszabbítsuk meg a BC-t D-ig.

Minthogy az ABC háromszögnek külső szöge ACD, ez nagyobb a belső és szembenfekvő ABC szögnél (16.). Adjuk hozzá a közös ACB-t. Tehát ACD, ACB nagyobb, mint ABC, BCA. De ACD és ACB két derékszöggel egyenlő. Ennélfogva ABC és BCA két derékszögnél kisebb. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy BAC és ACB is két derékszögnél kisebb, továbbá CAB és ABC is.

Tehát minden háromszögnek két szöge két derékszögnél kisebb, bármily módon is vegyük azokat. Ezt kellett bebizonyítanunk.

18.

Minden háromszögben a nagyobb oldal nagyobb szöget fog át.



Legyen az ABC háromszögnek AC oldala nagyobb AB-nél. Azt mondom, hogy az ABC szög nagyobb a BCA-nál.

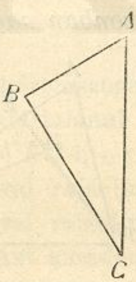
Minthogy AC nagyobb AB-nél, tegyük AB-vel egyenlővé AD-t és húzzuk meg BD-t.

És minthogy BCD háromszögnek külső szöge ADB, ez nagyobb a belső és szembenfekvő DCB-nél (16.). Az ADB azonban egyenlő ABD-vel, mert az AB oldal egyenlő AD-vel. Tehát az ABD nagyobb az ACB-nél. Ennélfogva az ABC annál nagyobb az ACB-nél.

Tehát minden háromszögben a nagyobb oldal nagyobb szöget fog át. Ezt kellett bebizonyítanunk.

19.

Minden háromszögben a nagyobb szöget nagyobb oldal fogja át.



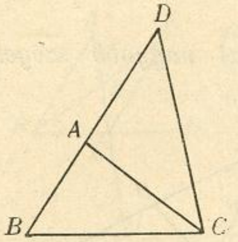
Legyen az ABC háromszögnek ABC szöge nagyobb BCA-nál. Azt mondom, az AC oldal nagyobb az AB oldalnál.

Mert ha nincs úgy, akkor AC vagy egyenlő AB-vel vagy pedig kisebb nála. De AC nem egyenlő AB-vel. Mert akkor az ABC szög egyenlő volna az ACB-vel. Pedig nem az. Tehát az AC nem egyenlő az AB-vel. De az AC kisebb sem lehet az AB-nél. Mert akkor az ABC szög kisebb volna az ACB-nél. Pedig nem az. Tehát az AC nem kisebb az AB-nél. Bebizonyítottuk pedig azt is, hogy nem egyenlő vele. Ennélfogva az AC nagyobb az AB-nél.

Tehát minden háromszögben a nagyobb szöget nagyobb oldal fogja át. Ezt kellett bebizonyítanunk.

20.

Minden háromszögben két oldal a harmadiknál nagyobb, bármily módon is vegyük azokat.



Legyen a háromszög ABC. Azt mondom, hogy az ABC háromszög két oldala a harmadiknál nagyobb, bármily módon is vegyük azokat, a BA, AC a BC-nél, az AB, BC az AC-nél, a BC, CA pedig az AB-nél.

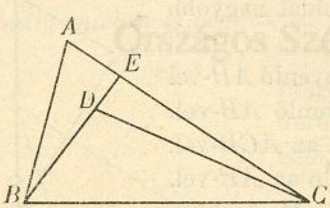
Hosszabbítsuk meg a BA-t a D pontig, tegyük CA-val egyenlővé AD-t és húzzuk meg a DC-t.

Minthogy DA egyenlő AC-vel, az ADC szög is egyenlő az ACD-vel. A BCD tehát nagyobb az ADC-nél. És minthogy a DCB háromszögnek BCD szöge nagyobb a BDC-nél, a nagyobb szöget nagyobb oldal fogja át, a DB tehát a BC-nél nagyobb (19.). DA pedig egyenlő AC-vel. A BA, AC tehát nagyobb a BC-nél. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az AB, BC a CA-nál nagyobb, a BC, CA pedig az AB-nél.

Tehát minden háromszögben két oldal a harmadiknál nagyobb, bármily módon is vegyük azokat. Ezt kellett bebizonyítanunk.

21.

Ha a háromszög egyik oldalának végpontjaiból két belső vonalat húzunk, ezek a háromszög másik két oldalánál kisebbek, azonban nagyobb szöget alkotnak.



Az ABC háromszög BC oldalának B és C végpontjaiból húzzuk meg a BD, DC belső két vonalat. Azt mondom, hogy a BD, DC a háromszög két másik, BA, AC oldalánál kisebb, azonban a BAC-nél nagyobb BDC szöget alkotnak.

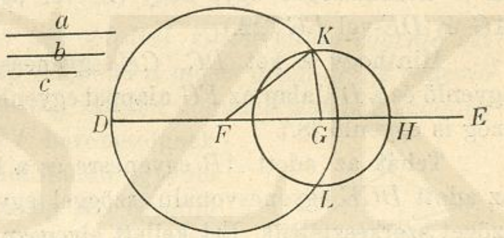
Hosszabbítsuk meg BD-t E-ig. És minthogy bármely háromszögben két oldal a harmadiknál nagyobb (20.), az ABE háromszögnek két AB, AE oldala a BE-nél nagyobb. Adjuk hozzá a közös EC-t. Ennélfogva BA, AC nagyobb, mint BE, EC. Viszont, minthogy a CED háromszögnek két CE és ED oldala a CD-nél nagyobb, adjuk hozzá a közös DB-t. A CE, EB tehát nagyobb, mint CD, DB. De bizonyítottuk, hogy BE, EC-nél nagyobb BA, AC. Ennélfogva BA, AC annál nagyobb, mint BD, DC.

Viszont, minthogy minden háromszögnek külső szöge a belső és szembenfekvő szögnél nagyobb (16.), a CDE háromszögnek BDC külső szöge nagyobb a CED-nél. Ugyanebből az okból az ABE háromszögnek CEB külső szöge nagyobb a BAC-nél. De bebizonyítottuk, hogy CEB-nél nagyobb BDC. Tehát a BDC annál nagyobb a BAC-nél.

Ha tehát a háromszög egyik oldalának végpontjaiból két belső vonalat húzunk, ezek a háromszög másik két oldalánál kisebbek, azonban nagyobb szöget alkotnak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

22.

Három egyenesből, melyek három adott egyenessel egyenlők, szerkesszünk háromszöget. Két egyenesnek azonban a harmadiknál nagyobbnak kell lennie, bármily módon is vegyük azokat (minthogy minden háromszögnek két oldala a harmadiknál nagyobb, bármily módon is vegyük azokat).



Legyen a három adott egyenes a, b, c, melyeknek ketteje a harmadiknál nagyobb legyen, bármily módon is vegyük azokat, az a, b a c-nél, az a, c a b-nél, a b, c pedig az a-nál. Tehát ezekből az a, b, c-vel egyenlő egyenesekből szerkesszünk háromszöget.

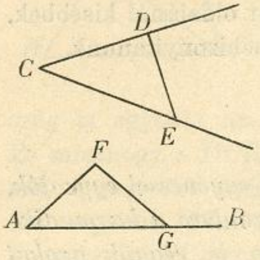
Húzzuk meg a D-ben határolt DE egyenest határtalanul E felé és tegyük a-val egyenlővé DF-et, b-vel egyenlővé FG-t, c-vel egyenlővé pedig GH-t. Az F középpontból FD sugárral rajzoljuk meg a DKL kört. Viszont G középpontból GH sugárral rajzoljuk meg a KLH kört és húzzuk meg KF-et és KG-t. Azt mondom, hogy az a, b, c-vel egyenlő három egyenesből szerkesztett háromszög a KFG.

Minthogy F pont a DKL kör középpontja, FD egyenlő FK-val. De FD egyenlő a-val. KF tehát szintén a-val egyenlő. Viszont, minthogy G pont az LKH kör középpontja, GH egyenlő GK-val. De GH egyenlő c-vel. Tehát KG szintén c-vel egyenlő. Továbbá FG b-vel egyenlő. A három KF, FG, GK egyenes tehát a három a, b, c egyenessel egyenlő.

Tehát a három KF, FG, GK egyenesből, melyek a három adott a, b, c egyenessel egyenlők, a KFG háromszöget szerkesztettük. Ezt kellett elvégeznünk.

23.

Adott egyenesre és egy benne fekvő pontjában szerkesszünk adott egyenesvonalú szöggel egyenlő egyenesvonalú szöget.



Legyen az adott egyenes AB, a benne fekvő pont A, az adott egyenesvonalú szög pedig DCE. Erre az adott AB egyenesre és a benne fekvő A pontban szerkesszünk az adott DCE egyenesvonalú szöggel egyenlő egyenesvonalú szöget.

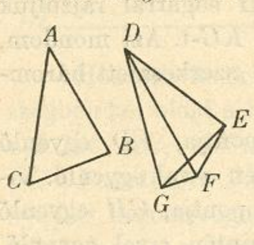
Vegyünk fel a CD, CE egyenesek mindegyikében tetszőleges D, E pontokat és húzzuk meg DE-t. A három egyenesből, melyek a három CD, DE, CE egyenessel egyenlők, szerkesszük meg az AFG háromszöget úgy, hogy CD-vel egyenlő legyen AF, CE-vel AG és DE-vel FG (22.).

Minthogy a két DC, CE egyenessel FA, AG külön-külön egyenlő és a DE alap az FG alappal egyenlő, a DCE szöggel az FAG szög is egyenlő (8.).

Tehát az adott AB egyenesre és a benne fekvő A pontjában az adott DCE egyenesvonalú szöggel egyenlő FAG egyenesvonalú szöget szerkesztettük. Ezt kellett elvégeznünk.

24.

Ha két háromszögnek két oldallal külön-külön egyenlő két oldala van, de az egyenlő egyenesek által bezárt szögek egyike nagyobb a másik szögnél, az egyik alap szintén nagyobb a másik alapnál.



Legyen a két ABC, DEF háromszögnek a két AB, AC oldallal külön-külön egyenlő két oldala DE, DF, még pedig AB egyenlő DE-vel és AC egyenlő DF-fel, az A szög azonban nagyobb a D szögnél. Azt mondom, hogy a BC alap is nagyobb a EF alapnál.

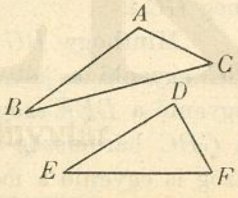
Minthogy a BAC szög nagyobb az EDF szögnél, a DE egyenesre és a benne fekvő D pontban a BAC szöggel egyenlő EDG szöget szerkesztünk (23.), tegyük AC-vel vagy DF-fel egyenlővé DG-t és húzzuk meg EG-t, FG-t.

Minthogy AB egyenlő DE-vel, AC pedig DG-vel, a két BA, AC egyenlő a két ED-vel, DG-vel külön-külön. És a BAC szög egyenlő az EDG szöggel. A BC alap tehát egyenlő az EG alappal (4.). Viszont, minthogy DF egyenlő DG-vel, a DGF szög egyenlő a DFG-vel. A DFG tehát nagyobb az EGF-nél. Az EFG szög tehát annál nagyobb az EGF-nél. És minthogy az EFG háromszögnek az EGF szögnél nagyobb EFG szöge van, a nagyobb szöget pedig nagyobb oldal fogja át (19.), az EG oldal tehát nagyobb az EF-nél. EG pedig egyenlő BC-vel. Tehát BC is nagyobb EF-nél.

Ha tehát két háromszögnek két oldallal külön-külön egyenlő két oldala van, de az egyenlő egyenesek által bezárt szögek egyike nagyobb a másik szögnél, az egyik alap szintén nagyobb a másik alapnál. Ezt kellett bebizonyítanunk.

25.

Ha két háromszögnek két oldallal külön-külön egyenlő két oldala van, de az egyik alap nagyobb a másik alapnál, az egyenlő egyenesek által bezárt egyik szög szintén nagyobb a másik szögnél.



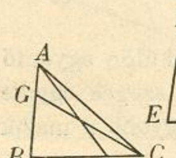
Legyen a két ABC, DEF háromszögnek a két AB, AC oldallal külön-külön egyenlő két oldala DE, EF, még pedig AB egyenlő DE-vel és AC egyenlő DF-fel. A BC alap azonban nagyobb az EF alapnál. Azt mondom, hogy a BAC szög is nagyobb az EDF szögnél.

Mert ha nincs úgy, akkor vagy egyenlő vele, vagy kisebb nála. De a BAC nem egyenlő az EDF-fel. Mert akkor a BC alap egyenlő volna az EF alappal. Pedig nem az. Tehát a BAC szög nem egyenlő az EDF-fel. De a BAC kisebb sem lehet az EDF-nél. Mert akkor a BC alap kisebb volna az EF alapnál (24.). Pedig nem az. Tehát a BAC szög nem kisebb az EDF-nél. Bebizonyítottuk pedig azt is, hogy nem egyenlő vele. Ennélfogva a BAC nagyobb az EDF-nél.

Ha tehát két háromszögnek két oldallal külön-külön egyenlő két oldala van, de az egyik alap nagyobb a másik alapnál, az egyenlő egyenesek által bezárt egyik szög szintén nagyobb a másik szögnél. Ezt kellett bebizonyítanunk.

26.

Ha két háromszögnek két szöggel külön-külön egyenlő két szöge van és az egyik oldallal az egyik oldal egyenlő, akár az, mely az egyenlő szögek mellett fekszik, akár az, melyet az egyenlő szögek valamelyike átfog, a másik két oldal is egyenlő (külön-külön) a másik két oldallal és a harmadik szög is egyenlő a harmadik szöggel.



Legyen a két ABC, DEF háromszögnek két ABC, BCA szögével külön-külön egyenlő két szöge DEF, EFD, még pedig ABC egyenlő DEF-fel és BCA egyenlő EFD-vel. És legyen az egyik oldallal egyenlő oldal először az egyenlő szögek mellett fekvő BC és EF. Azt mondom, hogy a másik két oldal is egyenlő külön-külön, az AB a DE-vel, az AC pedig a DF-fel és a harmadik szög is egyenlő a harmadik szöggel, a BAC az EDF-fel.

Mert ha AB nem egyenlő DE-vel, egyikük nagyobb. Legyen a nagyobbik az AB, tegyük egyenlővé DE-vel BG-t és húzzuk meg GC-t.

Minthogy BG egyenlő DE-vel, BC pedig EF-el, a két BG, BC egyenlő a két DE-vel, EF-el külön-külön. És a GBC szög egyenlő a DEF szöggel. A GC alap tehát egyenlő a DF alappal és a GBC háromszög egyenlő a DEF háromszöggel és a másik két szög is egyenlő a másik két szöggel, melyeket az egyenlő oldalak átfognak. A GCB szög tehát egyenlő a DFE-vel. De a DFE is egyenlő a BCA-val. A BCG tehát a BCA-val egyenlő, a kisebbik a nagyobbikkal. De ez lehetetlen. Az AB tehát nem különbözik a DE-től. Tehát egyenlő vele. De BC is egyenlő EF-el. A két AB, BC tehát a két DE-vel, EF-el egyenlő külön-külön. És az ABC szög is egyenlő a DEF-el. Az AC alap tehát egyenlő a DF alappal és a harmadik BAC szög is egyenlő a harmadik EDF szöggel.

Legyenek másrészt az egyenlő szögek által átfogott egyenlő oldalok AB, DE. Azt mondom most, hogy a másik két oldal a a másik két oldallal egyenlő, az AC a DF-el, a BC pedig az EF-fel és a harmadik BAC szög egyenlő a harmadik EDF szöggel,

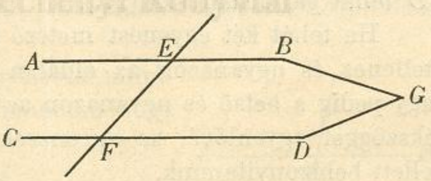
Mert ha BC nem egyenlő EF-el, egyikük nagyobb. Legyen a nagyobbik, ha lehet, a BC és tegyük egyenlővé EF-fel BH-t, és húzzuk meg AH-t. Minthogy BH egyenlő EF-fel, AB pedig DE-vel, a két AB, BH egyenlő a két DE-vel, EF-fel külön-külön. És egyenlő szögeket zárnak közbe. Az AH alap tehát egyenlő a DF alappal és az ABH háromszög egyenlő a DEF háromszöggel és a másik két szög is egyenlő a másik két szöggel, melyeket az egyenlő oldalok átfognak. A BHA szög tehát egyenlő az EFD-vel. De az EFD is egyenlő a BCA-val. Az AHC háromszögnek külső BHA szöge egyenlő volna a belső és szembenfekvő BCA szöggel (16.). De ez lehetetlen. A BC tehát nem különbözik az EF-től. Tehát egyenlő vele. De az AB is egyenlő a DE-vel. A két AB, BC tehát a két DE-vel, EF-el egyenlő különkülön. És egyenlő szögeket zárnak be. Az AC alap tehát egyenlő a DF alappal, az ABC háromszög egyenlő a DEF háromszöggel és a harmadik BAC szög is egyenlő a harmadik EDF szöggel.

Ha tehát két háromszögnek két szöggel külön-külön egyenlő két szöge van és az egyik oldallal az egyik oldal egyenlő, akár az, mely az egyenlő szögek mellett fekszik, akár az, melyet az egyenlő szögek valamelyike átfog, a másik két oldal is egyenlő a másik két oldallal és a harmadik szög is egyenlő a harmadik szöggel. Ezt kellett bebizonyítanunk.

27.

Ha két egyenest metsző egyenes a váltószögeket egymással egyenlővé teszi, az egyenesek párhuzamosak egymással.

A két AB, CD egyenest metsző EF egyenes tegye az AEF, EFD váltószögeket egymással egyenlővé. Azt mondom, hogy AB és CD párhuzamosak.

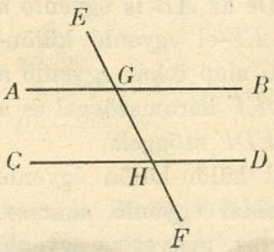


Mert ha nincs úgy, a meghosszabbított AB, CD találkoznak vagy a B, D oldalán, vagy az A, C oldalán. Hosszabbítsuk meg őket és találkozzanak a B, D oldalán G-ben. A GEF háromszög külső AEF szöge egyenlő volna a belső és szembenfekvő EFG szöggel (16.). De ez lehetetlen. Tehát a meghosszabbított AB, CD egyenesek nem találkozhatnak a B, D oldalán. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az A, C oldalán sem. Ha azonban seholsem találkoznak, párhuzamosak (XXIII. def.). Az AB és CD tehát párhuzamosak.

Ha tehát két egyenest metsző egyenes a váltószögeket egymással egyenlővé teszi, az egyenesek párhuzamosak egymással. Ezt kellett bebizonyítanunk.

28.

Ha két egyenest metsző egyenes a külső szöget a belső, átellenes és ugyanazon az oldalán fekvő szöggel egyenlővé teszi, vagy pedig a belső és ugyanazon az oldalán fekvő szögeket két derékszöggel egyenlővé, az egyenesek párhuzamosak egymással.



A két AB, CD egyenest metsző EF egyenes tegye a külső EGB szöget a belső és átellenes GHD szöggel egyenlővé vagy pedig a belső és ugyanazon az oldalán fekvő BGH, GHD szögeket két derékszöggel egyenlővé. Azt mondom, hogy AB és CD párhuzamosak.

Minthogy EGB egyenlő GHD-vel és EGB egyenlő AGH-val, AGH is egyenlő GHD-vel. És ezek váltószögek. Az AB és CD tehát párhuzamosak (27.).

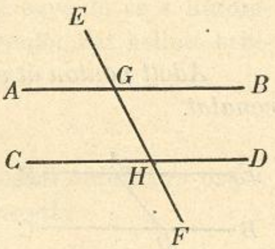
Viszont, minthogy BGH, GHD is két derékszöggel egyenlő és AGH, BHG is két derékszöggel egyenlő (13), AGH, BGH egyenlő BGH-val, GHD-vel. Vonjuk ki a közös BGH-t. Az AGH maradék tehát egyenlő a GHD maradékkal. És ezek váltószögek. Az AB és CD tehát párhuzamosak (27.).

Ha tehát két egyenest metsző egyenes a külső szöget a belső, átellenes és ugyanazon az oldalán fekvő szöggel egyenlővé teszi, vagy pedig a belső és ugyanazon az oldalán fekvő szögeket két derékszöggel egyenlővé, az egyenesek párhuzamosak egymással. Ezt kellett bebizonyitanunk.

29.

Párhuzamos egyeneseket metsző egyenes a váltószögeket egymással egyenlőkké teszi, a külső szöget a belső és szembenfekvő szöggel és a belső és ugyanazon az oldalán fekvő szögeket két derékszöggel egyenlővé.

A párhuzamos AB, CD egyeneseket messe az EF egyenes. Azt mondom, hogy az AGH, GHD váltószögeket egyenlőkké teszi, a külső EGB szöget a belső és szembenfekvő GHD szöggel és a belső és ugyanazon az oldalán fekvő *BGH*, *GHD* szögeket két derékszöggel egyenlővé.



Mert ha *AGH* és *GHD* nem egyenlők, egyikük nagyobb. Legyen a nagyobbik *AGH*. Adjuk hozzá a közös *BGH*-t. Az *AGH*, *BGH* tehát a *BGH*-nál, *GHD*-nél nagyobb.

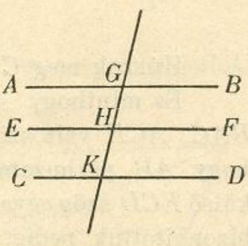
De az *AGH*, *BGH* két derékszöggel egyenlő. A *BGH*, *GHD* tehát két derékszögnél kisebbek. De a két derékszögnél kisebb szögeket alkotó egyenesek határtalanul meghosszabbítva találkoznak (V. poszt.). Tehát az *AB*, *CD* határtalanul meghosszabbítva találkoznak. Pedig nem találkoznak, mert párhuzamosaknak vettük fel őket. Az *AGH* és *GHD* tehát nem különböznek egymástól. Tehát egyenlők. De az *AGH* egyenlő az *EGB*-vel. Tehát az *EGB* is egyenlő *GHD*-vel. Adjuk hozzá a közös *BGH*-t. Az *EBG*, *BGH* tehát *BGH*-val, *GHD*-vel egyenlő. De *EGB*, *BGH* két derékszöggel egyenlő. Tehát *BGH*, *GHD* is két derékszöggel egyenlő.

Tehát párhuzamos egyeneseket metsző egyenes a váltószögeket egymással egyenlőkké teszi, a külső szöget a belső és szembenfekvő szöggel és a belső és ugyanazon az oldalán fekvő szögeket két derékszöggel egyenlővé. Ezt kellett bebizonyítanunk.

30.

Ugyanazzal az egyenessel párhuzamos egyenesek egymással is párhuzamosak.

Legyen az *AB*, *CD* egyenesek mindegyike *EF*-fel párhuzamos. Azt mondom, hogy *AB* és *CD* is párhuzamosak.



Messe őket a *GK* egyenes.

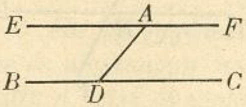
Minthogy az *AB*, *EF* párhuzamos egyeneseket a *GK* metszi, az *AGK* egyenlő a *GHF*-fel (29.). Viszont, minthogy az *EF*, *CD* párhuzamos egyeneseket a *GK* metszi, a *GHF* egyenlő a *GKD*-vel (29.). De bizonyítottuk, hogy az *AGK* is egyenlő a *GHF*-fel. Tehát az *AGK* a *GKD*-vel is egyenlő. És ezek váltószögek. Az *AB* és *CD* tehát párhuzamosak.

(Ugyanazzal az egyenessel párhuzamos egyenesek tehát egymással is párhuzamosak). Ezt kellett bebizonyítanunk.

7E

31.

Adott ponton át vonjunk adott egyenessel párhuzamos egyenes vonalat.



Legyen az adott pont A, az adott egyenes pedig BC. Ezen az A ponton át vonjunk a BC egyenessel párhuzamos egyenes vonalat.

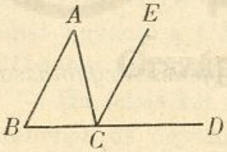
Vegyünk fel BC-ben tetszőleges D pontot és húzzuk meg AD-t. Szerkesszük meg a DA egyenesre és a benne fekvő A pontnál az ADC szöggel egyenlő DAE szöget (23.). És hosszabbítsuk meg az egyenest EA irányában AF felé.

Minthogy a két BC, EF egyenest metsző AD az EAD, ADC váltószögeket egymással egyenlővé teszi, EAF párhuzamos BC-vel.

Az adott A ponton át tehát az adott BC egyenessel párhuzamos EAF egyenes vonalat vontuk. Ezt kellett elvégeznünk.

32.

Ha bármely háromszög egyik oldalát meghosszabbítjuk, a külső szög a két belső és szembenfekvő szöggel egyenlő és a háromszög három belső szöge két derékszöggel egyenlő.



Legyen a háromszög ABC és hosszabbítsuk meg egyik oldalát, BC-t D-ig. Azt mondom, hogy a külső ACD szög a két belső CAB, ABC szöggel egyenlő és a háromszög három belső ABC, BCA, CAB szöge két derékszöggel egyenlő.

Húzzuk meg C ponton át az AB egyenessel páruzamos CE-t.

És minthogy AB párhuzamos CE-vel és ezeket AC metszi, a BAC, ACE váltószögek egyenlők egymással (29.). Másrészt, minthogy AB párhuzamos CE-vel és ezeket a BD egyenes metszi, a külső ECD szög egyenlő a belső és szembenfekvő ABC-vel (29.). Bebizonyítottuk pedig, hogy ACE és BAC egyenlők. Tehát az ACD szög egyenlő a két belső és szembenfekvő BAC, ABC szöggel.

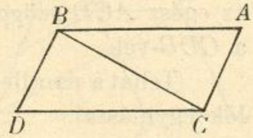
Adjuk hozzá a közös ACB-t. Az ACD, ACB tehát a három ABC, BCA, CAB szöggel egyenlő. De ACD, ACB két derékszöggel egyenlő (13.). Tehát az ACB, CBA, CAB is két derékszöggel egyenlő.

Ha tehát bármely háromszög egyik oldalát meghosszabbítjuk, a külső szög a két belső és szembenfekvő szöggel egyenlő és a háromszög három belső szöge két derékszöggel egyenlő. Ezt kellett bebizonyítanunk.

33.

Egyenlő és párhuzamos egyeneseket mindkét oldalukon összekötő egyenesek szintén egyenlők és párhuzamosak.

Legyenek az egyenlő és párhuzamos egyenesek AB, CD és kössék őket össze mindkét oldalukon az AC, BD egyenesek. Azt mondom, hogy az AC, BD egyenesek szintén egyenlők és párhuzamosak.



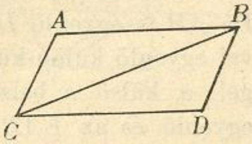
Húzzuk meg BC-t. Minthogy az AB párhuzamos a CD-vel és a BC ezeket metszi, az ABC, BCD váltószögek egyenlők egymással (29.). És minthogy AB egyenlő CD-vel, a BC pedig közös, a két AB, BC egyenlő a két BC-vel, CD-vel. És az ABC szög egyenlő a BCD-vel. Az AC alap tehát egyenlő a BD alappal, az ABC háromszög egyenlő a BCD háromszöggel és a másik két szög egyenlő a másik két szöggel külön-külön, melyeket az egyenlő oldalok átfognak. Tehát az ACB szög egyenlő a CBD szöggel (4.). És minthogy a két AC, BD egyenest metsző BC egyenes a váltószögeket egymással egyenlőkké teszi, az AC és BD párhuzamosak (27.). Bebizonyítottuk pedig azt is, hogy egyenlők.

Tehát egyenlő és párhuzamos egyeneseket mindkét oldalukon összekötő egyenesek szintén egyenlők és párhuzamosak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

34.

A parallelogrammok szembenfekvő oldalai és szögei egyenlők egymással és az átló megfelezi azt.

Legyen a parallelogramm $ACDB$, átlója pedig BC. Azt mondom, hogy az $ACDB$ parallelogramm szembenfekvő oldalai és szögei egymással egyenlők és a BC átló megfelezi azt.



Minthogy AB párhuzamos CD-vel és a BC egyenes metszi őket, az ABC, BCD váltószögek egyenlők egymással (29.). Másrészt, minthogy AC párhuzamos BD-vel és a BC egyenes metszi őket, az ACB, CBD váltószögek egyenlők egymással. A két ABC, BCD háromszögnek két ABC, BCA szögével külön-külön egyenlő két BCD, CBD szöge van és az egyik oldallal az egyik oldal egyenlő, mely az egyenlő szögek mellett fekszik, a közös BC. Tehát a másik két oldal a másik két oldallal is egyenlő különkülön és a harmadik szög is egyenlő a harmadik szöggel (26.). Az AB oldal tehát a CD-vel, az AC pedig a BD-vel egyenlő és a BAC szög egyenlő a CBD szöggel. És minthogy az ABC szög egyenlő a BCD-vel, a CBD pedig az ACB-vel, az egész ABD szög is egyenlő az egész ACD szöggel. De bebizonyítottuk, hogy a BAC is egyenlő a CDB-vel.

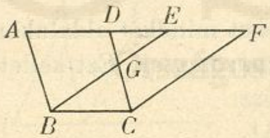
Tehát a parallelogrammok szembenfekvő oldalai és szögei egyenlők egymással.

Továbbá azt mondom, hogy az átló megfelezi. Minthogy AB egyenlő CD-vel, a BC pedig közös, a két AB, BC a két CD-vel, BC-vel egyenlő külön-külön. És az ABC szög egyenlő a BCD szöggel. Az AC alap tehát egyenlő a BD alappal. Az ABC háromszög is egyenlő a BCD háromszöggel (4.).

Tehát a BC átló megfelezi az $ABCD$ parallelogrammot. Ezt kellett bebizonyítanunk.

35.

Ugyanarra az alapra helyezett és ugyanazon párhuzamosok között fekvő parallelogrammok egyenlők egymással.



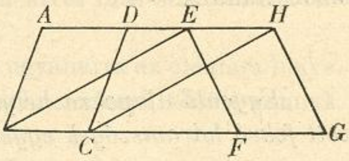
Legyenek az $ABCD$, $EBCF$ parallelogrammok ugyanazon a BC alapon és ugyanazon AF, BC párhuzamosok között. Azt mondom, hogy az $ABCD$ egyenlő az $EBCF$ parallelogrammal.

Minthogy az $ABCD$ parallelogramm, AD egyenlő BC-vel (34.). Ugyanabból az okból EF egyenlő BC-vel. Ennélfogva AD egyenlő EF-fel. És közös a DE. Az egész AE tehát egyenlő az egész DF-fel. De AB is egyenlő DC-vel. A két EA, AB pedig a két FD-vel, DC-vel egyenlő külön-külön. És az FDC szög is egyenlő az EAB szöggel, a külső a belsővel (29.). Az EB alap tehát az FC alappal egyenlő és az EAB háromszög a DFC háromszöggel egyenlő (4.). Vonjuk le a közös DGE-t. Az $ABCD$ maradék trapéz tehát egyenlő az $EGCF$ maradék trapézzel. Adjuk hozzá a közös GBC háromszöget. Az egész $ABCD$ parallelogramm tehát az egész $EBCF$ parallelogrammal egyenlő.

Tehát ugyanarra az alapra helyezett és ugyanazon párhuzamosok között fekvő parallelogrammok egyenlők egymással. Ezt kellett bebizonyitanunk.

36.

Egyenlő alapokra helyezett és ugyanazon párhuzamosok között fekvő parallelogrammok egyenlők egymással.



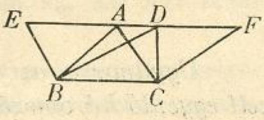
Legyenek $ABCD$, $EFGH$ parallelogrammok az egyenlő BC, FG alapokon és ugyanazon AH, BG párhuzamosok között. Azt mondom, hogy az $ABCD$ parallelogramm egyenlő az $EFGH$-val.

Húzzuk meg BE-et, CH-t. És minthogy BC egyenlő FG-vel, de FG az EH-val is egyenlő, BC is egyenlő EH-val. És párhuzamosok is. EB, HC pedig összekötik őket. Egyenlő és párhuzamos egyeneseket mindkét oldalukon összekötő egyenesek azonban szintén egyenlők és párhuzamosok (az EB, HC tehát egyenlők és párhuzamosok) [33.] Az $EBCH$ tehát parallelogramm (34.). És egyenlő az $ABCD$-vel. Mert ugyanegy BC alapjuk van és ugyanazon BC, AH párhuzamosok között vannak (35.). Ugyanabból az okból $EFGH$ is egyenlő $EBCH$-val. Ennélfogva $ABCD$ parallelogramm $EFGH$-val is egyenlő.

Tehát egyenlő alapokra helyezett és ugyanazon párhuzamosok között fekvő parallelogrammok egyenlők egymással. Ezt kellett bebizonyitanunk.

37.

Ugyanarra az alapra helyezett és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek egyenlők egymással.



Legyenek az ABC, DBC haromszögek ugyanazon a BC alapon és ugyanazon AD, BC párhuzamosok között. Azt mondom, hogy az ABC háromszög egyenlő a DBC háromszöggel.

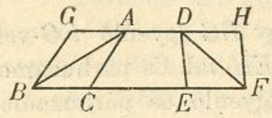
Hosszabbítsuk meg AD-t mindkét oldalán E, F felé és húzzuk meg B-n át a CA-val párhuzamos BE-t, C-n át pedig a BD-vel párhuzamos CF-et (31.). Az $EBCA$, $DBCF$ mindegyike tehát parallelogramm. És egyenlők. Minthogy ugyanazon az BC alapon és ugyanazon BC, EF párhuzamosok között vannak (35.). Az $EBCA$

parallelogramm fele az ABC háromszög. Mert az AB átló megfelezi (34.). A $DBCF$ parallelogramm fele pedig a DBC háromszög. Mert a DC átló megfelezi. (Egyenlők felei pedig egyenlők egymással.) Az ABC háromszög tehát egyenlő a DBC háromszöggel.

Tehát ugyanarra az alapra helyezett és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek egyenlők egymással. Ezt kellett bebizonyitanunk.

38.

Egyenlő alapokra helyezett és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek egyenlők egymással.



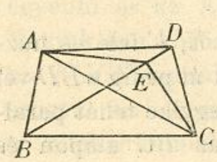
Legyenek az ABC, DEF háromszögek az egyenlő BC, EF alapokon és ugyanazon BF, AD párhuzamosok között. Azt mondom, hogy az ABC háromszög egyenlő a DEF háromszöggel.

Hosszabbitsuk meg AD-t mindegyik oldalán G, H felé és húzzuk meg B-n át a CA-val párhuzamos BG-t, F-en át pedig a DE-vel párhuzamos FH-t (31.). A $GBCA$, $DEFH$ mindegyike tehát parallelogramm. És $GBCA$ egyenlő $DEFH$-val. Minthogy egyenlő BC, EF alapokon és ugyanazon BF, GH párhuzamosok között vannak (36.). A $GBCA$ parallalogramm fele az ABC háromszög. Mert az AB átló megfelezi (34.). A $DEFH$ parallelogramm fele pedig az FED háromszög. Mert a DF átló megfelezi (34.). (Egyenlők felei pedig egyenlők egymással.) Az ABC háromszög tehát egyenlő a DEF háromszöggel.

Tehát egyenlő alapokra helyezett és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek egyenlők egymással. Ezt kellett bebizonyítanunk.

39.

Ugyanarra az alapra, annak ugyanarra az oldalára helyezett egyenlő háromszögek ugyanazon párhuzamosak között vannak.



Legyenek ugyanarra a BC alapra, annak ugyanarra az oldalára helyezett egyenlő háromszögek ABC, DBC. Azt mondom, hogy ezek ugyanazon párhuzamosok között vannak.

Húzzuk meg AD-t. Azt mondom, hogy AD párhuzamos BC-vel.

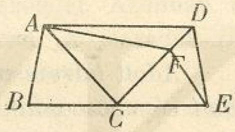
Mert ha nem az, húzzuk meg A ponton át a BC egyenessel párhuzamos AE-t és húzzuk meg EC-t. Az ABC háromszög tehát egyenlő az EBC háromszöggel. Minthogy ugyanazon a BC alapon és ugyanazon párhuzamosok között vannak (37.). Az ABC egyenlő DBC-vel. Ennélfogva DBC EBC-vel is egyenlő, a nagyobbik a kisebbikkel. De ez lehetetlen. AE tehát nem párhuzamos BC-vel. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy AD-n kívül más sem az. AD tehát párhuzamos BC-vel.

Tehát ugyanarra az alapra, annak ugyanarra az oldalára helyezett egyenlő háromszögek ugyanazon párhuzamosok között vannak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

40.

Egyenlő alapokra, azoknak ugyanarra az oldalára helyezett egyenlő háromszögek ugyanazon párhuzamosak között vannak.

Legyenek az ABC, CDE egyenlő háromszögek az egyenlő BC, CE alapokon, azoknak ugyanazon az oldalán. Azt mondom, hogy azok ugyanazon párhuzamosok között vannak.



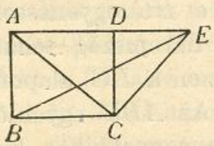
Húzzuk meg AD-t. Azt mondom, hogy AD párhuzamos BE-vel.

Mert ha nem az, húzzuk meg A-n át a BE-vel párhuzamos AF-et és húzzuk meg FE-t. Az ABC háromszög tehát egyenlő az FCE háromszöggel. Minthogy az egyenlő BC, CE alapokon és ugyanazon BE, AF párhuzamosok között vannak (38.). De az ABC háromszög egyenlő a DCE háromszöggel. Ennélfogva a DCE háromszög az FCE háromszöggel is egyenlő, a nagyobbik a kisebbikkel. De ez lehetetlen. AF tehát nem párhuzamos BE-vel. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy AD-n kívül más sem az. Az AD tehát párhuzamos BE-vel.

Tehát egyenlő alapokra, azoknak ugyanarra az oldalára helyezett egyenlő háromszögek ugyanazon párhuzamosok között vannak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

41.

Ha egy parallelogrammnak és egy háromszögnek ugyanaz az alapja van és ugyanazon párhuzamosok között vannak, a parallelogramm a háromszögnek kétszerese.



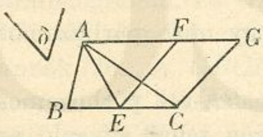
Legyen az $ABCD$ parallelogrammnak és az EBC háromszögnek ugyanaz a BC alapja és legyenek ugyanazon BC, AE párhuzamosak között. Azt mondom, hogy az $ABCD$ parallelogramm a BEC háromszög kétszerese.

Húzzuk meg AC-t. Az ABC háromszög egyenlő az EBC háromszöggel. Mert ugyanazon a BC alapon és ugyanazon BC, AE párhuzamosak között vannak (37.). De az $ABCD$ parallelogramm az ABC háromszög kétszerese. Mert az AC átló megfelezi (34.). Ennél fogva az $ABCD$ parallelogramm az EBC háromszögnek is kétszerese.

Ha tehát egy parallelogrammnak és egy háromszögnek ugyanaz az alapja van és ugyanazon párhuzamosok között vannak, a parallelogramm a háromszög kétszerese. Ezt kellett bebizonyítanunk.

42.

Adott háromszöggel egyenlő parallelogrammot szerkesszünk adott egyenesvonalú szögre.



Legyen az adott háromszög ABC, az adott egyenesvonalú szög pedig δ. Az ABC háromszöggel egyenlő parallelogrammot szerkesszünk a δ egyenesvonalú szögre.

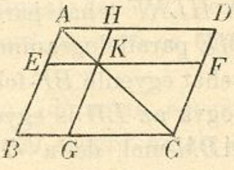
Felezzük meg BC-t E-ben, húzzuk meg AE-t és szerkesszük meg az EC egyenesre annak E pontjára a δ-val egyenlő CEF szöget (23.), húzzuk meg az A-n át az EC-vel párhuzamos AG-t, a C-n át pedig az EF-fel párhuzamos CG-t. Az $FECG$ tehát parallelogramm. És minthogy BE egyenlő EC-vel, az ABE háromszög egyenlő az AEC háromszöggel. Mert az egyenlő BE, EC alapokon és ugyanazon BC, AG párhuzamosok között vannak (38.). Az ABC háromszög tehát kétszerese az AEC háromszögnek. De az $FECG$ parallelogramm is kétszerese az AEC háromszögnek. Mert ugyanaz az alapjuk van és ugyanazon párhuzamosok között vannak (41.). Az $FECG$ parallelogramm tehát egyenlő az ABG háromszöggel. És a δ-val egyenlő CEF szöge van.

Tehát az adott ABC háromszöggel egyenlő $FECG$ parallelogrammot szerkesztettük CEF szögre, mely δ-val egyenlő. Ezt kellett elvégeznünk.

43.

Minden parallelogrammban a parallelogrammok kiegészítői az átló körül egyenlők egymással.

Legyen a parallelogramm $ABCD$, ennek átlója AC, az AC körül pedig legyenek az EH, FG parallelogrammok és a kiegészítőknek nevezett BK, KD. Azt mondom, hogy a BK kiegészítő egyenlő a KD kiegészítővel.



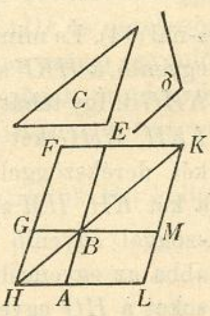
Minthogy $ABCD$ parallelogramm, ennek átlója pedig AC, az ABC háromszög egyenlő az ACD háromszöggel (34.). Viszont, minthogy EH parallelogramm, ennek átlója pedig AK, az AEK háromszög egyenlő az AHK háromszöggel. Ugyanabból az okból KFC háromszög is egyenlő KGC-vel. Minthogy AEK háromszög egyenlő AHK háromszöggel, KFC pedig KGC-vel, az AEK háromszög meg a KGC egyenlő az AHK meg a KFC háromszöggel. Azonban az egész ABC háromszög egyenlő az egész ADC-vel. A maradék BK kiegészítő tehát egyenlő a maradék KD kiegészítővel.

Tehát minden parallelogrammban a parallelogrammok kiegészitői az átló közül egyenlők egymással. Ezt kellett bebizonyítanunk.

44.

Adott egyenesre szabjunk ki adott háromszöggel egyenlő parallelogrammot adott egyenesvonalú szögre.

Legyen az adott egyenes AB, az adott háromszög C, az adott egyenesvonalú szög pedig δ. Erre az adott AB egyenesre szabjunk ki az adott C háromszöggel egyenlő parallelogrammot a δ szögre.

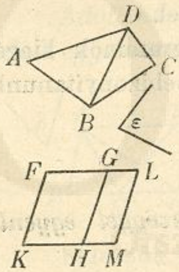


Szerkesszük meg a C háromszöggel egyenlő $BEFG$ parallelogrammot az EBG szögre, mely δ-val egyenlő (42.). Helyezzük el egy egyenesbe a BE-t, AB-t és húzzuk meg FG-t H-ig, az A-n át húzzuk meg a BG, EF valamelyikével párhuzamos AH-t és húzzuk meg HB-t. És minthogy az AH, EF párhuzamosokat a HF egyenes metszi, a két AHF, HFE szög két derékszöggel egyenlők (29.). A BHG, GFE tehát két derékszögnél kisebbek. A két derékszögnél kisebb szögeket alkotó egyenesek pedig határtalanul meghosszabbítva, találkoznak (V. poszt.). A HB, FE tehát meghosszabbítva találkoznak. Meghosszabbítva találkozzanak K-ban; húzzuk meg a K ponton át az EA, FH valamelyikével párhuzamos KL-et és hosszabbítsuk meg HA-t, GB-t L, M pontokig. A $HLKF$ tehát parallelogramm, átlója HK; HK körül pedig AG, ME parallelogrammok és a kiegészítőknek nevezett LB, BF. LB tehát egyenlő BF-fel (43.). De BF a C háromszöggel egyenlő. Ennélfogva az LB is egyenlő a C-vel. És minthogy GBE szög egyenlő ABM-mel, de a GBE szög egyenlő δ-val, az ABM is egyenlő a δ szöggel.

Adott AB egyenesre tehát adott C háromszöggel egyenlő LB parallelogrammot szabtunk ki ABM szögre, mely δ-val egyenlő. Ezt kellett elvégeznünk.

45.

Adott egyenesvonalú idommal egyenlő parallelogrammot szerkesszünk adott egyenesvonalú szögre.



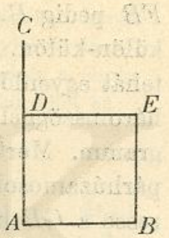
Legyen az adott egyenesvonalú idom $ABCD$, az adott egyenesvonalú szög pedig ε. Ezzel az $ABCD$ egyenesvonalú idommal egyenlő parallelogrammot szerkesszünk az adott ε szögre.

Húzzuk meg DB-t és szerkesszük meg az ABD háromszöggel egyenlő FH parallelogrammot a HKF szögre, a mely egyenlő ε-nal. És szabjuk ki a GH egyenesre a DBC háromszöggel egyenlő GM parallelogrammot a GHM szögre, amely egyenlő ε-nal (44). És minthogy az ε szög a HKF, GHM szögek mindegyikével egyenlő, a HKF szög tehát egyenlő a GHM-mel. Adjuk hozzá a közös KHG-t. Így tehát az FKH, KHG egyenlő a KHG-vel, GHM-mel. De FKH, KHG két derékszöggel egyenlő (23.). Tehát KHG, GHM is két derékszöggel egyenlő. Ennélfogva a GH egyenes H pontjában a két KH, HM egyenessel nem ugyanazon az oldalán két derékszöggel egyenlő mellékszögeket alkot. A KH és HM tehát ugyanabba az egyenesbe esnek (14.). És minthogy KM, FG párhuzamosokat a HG egyenes metszi, az MHG, HGF váltószögek egymással egyenlők (29.). Adjuk hozzá a közös HGL-et. Az MHG, HGL tehát egyenlő a HGF-fel, HGL-lel. De MHG, HGL két derékszöggel egyenlő (29.). Tehát a HGF, HGL is két derékszöggel egyenlő. A FG, GL tehát ugyanabba az egyenesbe esnek (14.). És minthogy az FK a HG-val egyenlő és párhuzamos, de a HG az ML-lel is az, a KF az ML-lel is egyenlő és párhuzamos (30.). A KM, FL egyenesek pedig összekötik őket. A KM, FL egyenesek tehát egyenlők és párhuzamosak. A $KFLM$ tehát parallelogramm. És minthogy az ABD háromszög egyenlő az FH parallelogrammal, az ABC pedig a GM-mel, az egész $ABCD$ egyenesvonalú idom egyenlő az egész $KFLM$ parallelogrammal.

Tehát az adott $ABCD$ egyenesvonalú idommal egyenlő $KFLM$ parallelogrammot szerkesztettük az FKM szögre, amely az adott ε-nal egyenlő. Ezt kellett elvégeznünk.

46.

Adott egyenesre szerkesszünk négyzetet.



Legyen az adott egyenes AB. Erre az AB egyenesre szerkeszszünk négyzetet.

Húzzuk meg az AB egyenesre a benne fekvő A pontjából az AC merőlegest és tegyük egyenlővé AB-vel AD-t. És húzzuk meg a D ponton át az AB-vel párhuzamos DE-et, B pontból pedig az AD-vel párhuzamos BE-t. Az $ADEB$ tehát parallelogramm. Az AB tehát egyenlő a DE-vel, az AD pedig a BE-vel (34.). De AB egyenlő AD-vel. Tehát mint a négy BA, AD, DE, EB egyenlő egymással. Az $ADEB$ perallelogramm ennélfogva egyenlőoldalú. Azt mondom, hogy derékszögű is. Minthogy az AB, DE párhúzamosokat az AD egyenes metszi, a BAD, ADE szögek két derékszöggel egyenlők (29.). BAD pedig derékszög. Tehát az ADE is derékszög. De a parallelogrammok szemközt fekvő oldalai és szögei egyenlők egymással (34.) Az ABE, BED szemközt fekvő szögek mindegyike tehát derékszög. Az $ADEB$ tehát derékszögű. Bebizonyítottuk pedig, hogy egyenlőoldalú is.

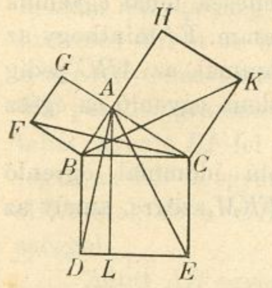
Tehát négyzet. És az AB egyenesre szerkesztettük. Ezt kellett elvégeznünk.

47.

A derékszögű háromszögben a derékszöget átfogó oldal négyzete egyenlő a derékszöget befogó oldalak négyzeteivel.

Legyen az ABC derékszögű háromszög derékszöge BAC. Azt mondom, hogy a BC négyzete egyenlő a BA, AC négyzeteivel.

Rajzoljuk meg a BC-re a $BDEC$ négyzetet, a BA-ra, AC-re pedig a GB, HC négyzeteket és húzzuk meg A-n át a BD, CE valamelyikével párhuzamos AL-et. És húzzuk meg az AD-t, FC-t. Minthogy a BAC, BAG mindegyike derékszög, a BA egyenes a benne fekvő A pontban a két AC, AG egyenessel nem ugyanazon az oldalán két derékszöggel egyenlő mellékszöget alkot. A CA, AG tehát egy egyenesbe esnek (14.). Ugyanabból az okból BA, AH is egy egyenesbe esnek. És a DBC, FBA szögek egyenlők. Mert mindegyikük derékszög. Adjuk hozzá a közös ABC-et. Az egész DBA tehát egyenlő az egész FBC-vel. És minthogy DB egyenlő BC-vel, FB pedig BA-val, a két DB, BA egyenlő a két FB-vel, BC-vel külön-külön. És a DBA szög egyenlő az FBC szöggel. Az AD alap tehát egyenlő az FC alappal és az ABD háromszög egyenlő a FBC háromszöggel (4.). És az ABD háromszög kétszerese a BL parallelogramm. Mert ugyanaz a BD alapjuk van és ugyanazon BD, AL párhúzamosok között vannak (41.). Az FBC háromszögnek kétszeresse a GB parallelogramm. Mert viszont ugyanaz az FB alapjuk van és ugyanazon FB, GC párhúzamosok között vannak. (Egyenlőknek kétszeresei pedig egyenlők.) A BL parallelogramm tehát egyenlő a GB négyzettel. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a CL parallelogramm egyenlő a HC négyzettel. Az egész $BDEC$ négyzet tehát a két GB, HC négyzetével egyenlő. A $BDEC$ négyzetet a BC-re rajzoltuk, a GB-t, HC-t pedig a BA-ra, AC-re. Tehát a BC oldal négyzete egyenlő a BA, AC oldalok négyzeteivel.



Tehát a derékszögű háromszögben a derékszöget átfogó oldal négyzete egyenlő a derékszöget befogó oldalok négyzeteivel. Ezt kellett bizonyítanunk.

A 47. feladat az úgynevezett Pythagoras-féle tételnek első ismert általános bizonyítása. Régi írók ugyanis arra utalnak, hogy a tételt már a pythagorasi iskolában ismerték, de nagyon valószínű, hogy maga Pythagoras (élt Kr. e. 569—470) fedezte fel. Azonban igen sok okunk van azt hinni, hogy Pythagoras nem ismerte e tételt egészen általánosságban, hanem valószinűleg csak bizonyos speciális esetek rendszerében. Nagyon nehéz ez ügyre teljes világosságot vetni, de talán elég közel állunk az igazsághoz, ha a következő képet alkotjuk magunknak: Pythagoras kétségkívül az *egyiptomiaktól* tanulta, hogy a 3, 4, 5 egységnyi oldalú háromszög derékszögű háromszög. A számokkal való beható foglalkozása közben a 3, 4, 5 számoknak ezt az összefüggését is csakhamar megtalálhatta, hogy $3^2+4^2=5^2$. De viszont három szám közötti, ehhez hasonló összefüggést talált a négyzetszámoknak és azok különbségeinek, a páratlan számok sorában:

1	4	9	**16**	**25**	36	49	64	81	100	121	**144**	**169**	196	225	256	289	324	361	400
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	**25**	27	29	31	33	35	37	39	41

441	484	529	**576**	**625**
43	45	47	**49**	

Ilyen összefüggések tehát még ezek:

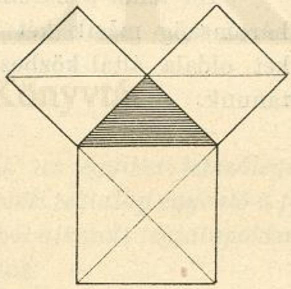
$$144+25=169,\quad 576+49=625$$

vagyis: $$12^2+5^2=13^2,\quad 24^2+7^2=25^2.$$

Visszatérve a geometriára, azt tapasztalhatta, hogy a 12, 5, 13 meg a 24, 7, 25 egységnyi oldalú háromszögek is derékszögű háromszögek. Vajjon megelégedett-e azonban e tekintetben a rajzzal, mely e háromszögeket derékszögűeknek mutatta, vagy pedig egyéb meggyőző okai, bizonyításai is voltak-e, azt nem tudjuk. Pythagoras még általános képletet is adott a derék szögű háromszögek egész számú oldalaira; e képlet mai jelölésünkkel ez:

$$\left(\frac{k^2-1}{2}\right)^2+k^2=\left(\frac{k^2+1}{2}\right)^2,$$

hol k egész (és páratlan) szám. Az oldalak hosszai tehát $\frac{k^2-1}{2}$, k, $\frac{k^2+1}{2}$ és így Pythagoras az összefüggést csak azokról az egész számú egységnyi oldalú háromszögekről ismerte, melyekben *az átfogó egy egységgel nagyobb, mint a hosszabbik befogó.* Pythagoras azonban az előbb említett háromszögeken kívül még az *egyenlőszárú derékszögű* háromszögről is ismerte az oldaloknak azt az összefüggését, hogy az átfogó négyzete oly nagy, mint a befogók négyzetei együttvéve. Az összefüggésről minden esetre a rajz alapján győződött meg: a háromszög minden oldalára megrajzolta a négyzetet és a négyzeteknek (az ábrában látható) alkalmas felosztása által megkapta az összefüggést.



Plato (élt Kr. e. 429—347) is adott képletet a derékszögű háromszög oldalaira

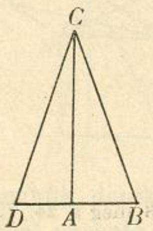
$$\left(\frac{k^2}{4}-1\right)^2+k^2=\left(\frac{k^2}{4}+1\right)^2$$

alakban mai jelölés szerint (k páros szám); tehát oly derékszögű háromszögeket talált, melyekben az átfogó két egységgel nagyobb, mint az egyik befogó.

Euklides általános bizonyítása természetesen fölöslegesekké tette e speciális eseteket.

48.

Ha a háromszögben az egyik oldal négyzete egyenlő a háromszög másik két oldalának négyzetével, a háromszög másik két oldala által közbezárt szög derékszög.



Legyen az ABC háromszög BC oldalának négyzete egyenlő a BA, AC oldalainak négyzetével. Azt mondom, hogy a BAC szög derékszög.

Húzzuk meg az A ponton át az AC-re merőleges AD-t, tegyük egyenlővé BA-val AD-t és húzzuk meg DC-t. Minthogy DA egyenlő AB-vel, a DA négyzete is egyenlő az AB négyzetével. Adjuk hozzá a közös AC négyzetét. A DA, AC négyzetei tehát egyenlők a BA, AC négyzeteivel. De a DA, AC négyzetei egyenlők a DC négyzetével. Mert DAC szög derékszög (47.). A BA, AC négyzetei pedig egyenlők a BC négyzetével. Mert így vettük fel. Igy tehát a DC négyzete egyenlő a BC négyzetével. Ennél fogva a DC oldal egyenlő a BC-vel. Minthogy DA egyenlő AB-vel és közös az AC, a két DA, AC egyenlő a két BA-val, AC-vel. És a DC alap egyenlő a BC alappal. A DAC szög tehát egyenlő a BAC szöggel (8.). A DAC szög azonban derékszög. Tehát a BAC szög is derékszög.

Ha tehát a háromszögben az egyik oldal négyzete egyenlő a háromszög másik két oldalának négyzetével, a háromszög másik két oldala által közbezárt szög derékszög. Ezt kellett bebizonyítanunk.

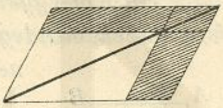
II. KÖNYV.

Definiciók.

I. Azt mondjuk, hogy minden téglalapot két, derékszöget befogó egyenes alkot.

E rövid meghatározás rendkívül fontos a görög geometriai algebra methodikájának tekintetében. Mai jelöléseinkkel így értelmezhetjük: ha az a és b általános mennyiségeket egyenes vonalak által fejezzük ki, akkor az ab szorzatot annak a téglalapnak területe mutatja, melyet az a és b általános mennyiségek mint oldalok alkotnak.

II. Minden parallelogrammban az átló körül fekvő parallelogrammok mindegyike a két kiegészítővel együtt neveztessék gnomonnak.

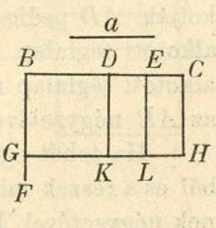


A gnomon fogalmát a mellékelt ábra minden nehézség és további magyarázat nélkül megvilágítja.

1.

Ha két egyenesünk van és közülük az egyiket tetszőleges számú részre osztjuk, a két egyenesből alkotott téglalap egyenlő a fel nem osztott egyenesből és az egyes részekből alkotott téglalapokkal.

Legyen a két egyenes a, BC és osszuk fel BC-t akárhogyan D, E pontokban. Azt mondom, hogy az a-ból, BC-ből alkotott téglalap egyenlő az a-ból, BD-ből meg az a-ból, DE-ből meg az a-ból, EC-ből alkotott téglalapokkal.



Húzzuk meg B-ből a BC-re merőleges BF-et, tegyük egyenlővé a-val BG-t, húzzuk meg G-ből a BC-vel párhuzamos GH-t és húzzuk meg a D, E, C pontokból a BG-vel párhuzamos DK, EL, CH egyeneseket.

Igy a BH egyenlő a BK-val, DL-lel, EH-val. És BH az a-ból, BC-ből alkotott téglalap. Mert GB, BC egyenesek alkotják, BG pedig egyenlő a-val. De BK az a-ból, BD-ből alkotott téglalap. Mert a GB, BD egyenesek alkotják, BG pedig egyenlő a-val. DL pedig az a-ból, DE-ből alkotott téglalap. Mert DK, valamint BG, egyenlő a-val. És hasonlóképen EH az a-ból, EC-ből alkotott téglalap. Igy tehát az a-ból, BC-ből alkotott téglalap egyenlő az a-ból, BD-ből meg az a-ból, DE-ből meg az a-ból, EC-ből alkotott téglalapokkal.

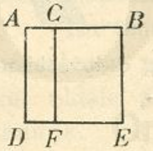
Ha tehát két egyenesünk van és közülük az egyiket tetszőleges számú részre osztjuk, a két egyenesből alkotott téglalap egyenlő a fel nem osztott egyenesből és az egyes részekből alkotott téglalapokkal. Ezt kellett bebizonyítanunk.

A tétel értelmezése mai jelölésünkkel:

$$a(b+c+d) = ab+ac+ad.$$

2.

Ha egy egyenes vonalat akárhogyan felosztunk, az egészből és a részek mindegyikéből alkotott téglalapok egyenlők az egésznek négyzetével.



Osszuk fel az AB egyenest akárhogyan C pontban. Azt mondom, hogy az AB-ből, BC-ből alkotott téglalap meg a BA-ból, AC-ből alkotott téglalap egyenlő az AB négyzetével.

Szerkesszük meg az AB-re az $ADEB$ négyzetet és húzzuk meg a C-n át az AD, BE mindegyikével párhuzamos CF-et.

Igy az AE egyenlő AF-fel, CE-vel. És az AE az AB négyzete, AF pedig a BA-ból, AC-ből alkotott téglalap. Mert a DA, AC alkotják, AD pedig egyenlő AB-vel. A CE pedig az AB-ből, BC-ből alkotott téglalap. Mert BE egyenlő AB-vel. Igy a BA-ból, AC-ből alkotott téglalap meg az AB-ből, BC-ből alkotott téglalap egyenlő az AB négyzetével.

Ha tehát egy egyenes vonalat akárhogyan felosztunk, az egészből és a részek mindegyikéből alkotott téglalapok egyenlők az egésznek négyzetével. Ezt kellett bebizonyítanunk.

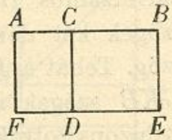
A tétel értelmezése mai jelölésünkkel:

$$ax+a(a-x)=a^2.$$

3.

Ha egy egyenes vonalat akárhogyan felosztunk, az egészből és a részek egyikéből alkotott téglalap egyenlő a részekből alkotott téglalappal és az előbb megnevezett rész négyzetével.

Osszuk fel az AB egyenest akárhogyan C pontban. Azt mondom, hogy az AB-ből, BC-ből alkotott téglalap egyenlő az AC-ből, CB-ből alkotott téglalappal és a BC négyzetével.



Szerkesszük meg a CB-re a $CDEB$ négyzetet és húzzuk meg ED-t F-ig, az A-n át pedig a CD, BE mindegyikével párhuzamos AF-et. Igy az AE egyenlő AD-vel, CE-vel. És az AE az AB-ből, BC-ből alkotott téglalap. Mert az AB, BE alkotják, BE pedig egyenlő BC-vel. Az AD pedig az AC-ből, CB-ből alkotott téglalap. Mert DC egyenlő CB-vel. A DB pedig a CB négyzete. Tehát az AB-ből, BC-ből alkotott téglalap egyenlő az AC-ből, CB-ből alkotott téglalappal és a BC négyzetével.

Ha tehát egy egyenes vonalat akárhogyan felosztunk, az egészből és a részek egyikéből alkotott téglalap egyenlő a részekből alkotott téglalappal és az előbb megnevezett rész négyzetével. Ezt kellett bebizonyítanunk.

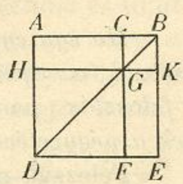
A tétel értelmezése mai jelölésünkkel:

$$ax = x(a-x) + x^2.$$

4.

Ha egy egyenes vonalat akárhogyan felosztunk, az egésznek a négyzete egyenlő a részek négyzeteivel meg a részekből alkotott kétszeres téglalappal.

Osszuk fel az AB egyenest akárhogyan C pontban. Azt mondom, hogy az AB négyzete egyenlő az AC és CB négyzeteivel meg az AC-ből, CB-ből alkotott téglalap kétszeresével.



Szerkesszük meg az AB-re az $ADEB$ négyzetet, húzzuk meg BD-t, a C-n át az AD, EB mindegyikével párhuzamos CF-et, a G-n át pedig az AB, DE mindegyikével párhuzamos HK-t. És minthogy CF párhuzamos AD-vel és ezeket BD metszi, a CGB külső szög egyenlő a belső és szembenfekvő ADB-vel (I. 29.) De az ADB

az ABD-vel is egyenlő, mert a BA oldal egyenlő az AD-vel (I. 5.). Tehát a CGB szög is egyenlő a GBC-vel. Ennélfogva a BC oldal a CG-vel egyenlő (I. 6.). De CB is egyenlő GK-val (I. 34.), CG pedig KB-vel. A GK tehát egyenlő KB-vel. A $CGKB$ tehát egyenlőoldalú. Azt mondom, hogy derékszögű is. Minthogy CG párhuzamos BK-val (és ezeket CB egyenes metszi), a KBC, GCB szögek két derékszöggel egyenlők (I. 29.) A KBC azonban derékszög. Tehát a BCG is derékszög. Ennélfogva a szembenfekvő CGK, GKB szögek is derékszögek (I. 34.). A $CGKB$ tehát derékszögű. Bebizonyítottuk pedig, hogy egyenlőoldalú is. Tehát négyzet. És CB-re szerkesztettük. Ugyanebből az okból HF is négyzet. És ezt HG-re, vagyis AC-re szerkesztettük. A HF, KC négyzeteket tehát az AC-re, CB-re szerkesztettük. És minthogy AG egyenlő GE-vel, az AG az AC-ből, CB-ből alkotott téglalap. Mert a GC egyenlő a CB-vel. És így a GE is az AC-ből, CB-ből alkotott téglalap. Tehát az AG meg a GE az AC-ből, CB-ből alkotott téglalap kétszerese. A HF, CK pedig az AC-re, CB-re szerkesztett négyzetek. Tehát mind a négy, HF, CK, AG, GE egyenlő az AC, CB négyzeteivel meg az AC-ből, CB-ből alkotott téglalap kétszeresével. De HF, CK, AG, GE az egész $ADEB$, amely az AB négyzete. Tehát az AB négyzete egyenlő az AC, CB négyzeteivel meg az AC-ből, CB-ből alkotott téglalap kétszeresével.

Ha tehát egy egyenes vonalat akárhogyan felosztunk, az egésznek a négyzete egyenlő a részek négyzeteivel meg a részekből alkotott kétszeres téglalappal. Ezt kellett bebizonyítanunk.

A tétel értelmezése mai jelölésünkkel:

$$a^2 = x^2 + (a-x)^2 + 2x(a-x).$$

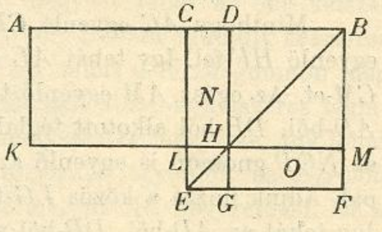
5.

Ha egy egyenes vonalat egyenlő és nem egyenlő részekre felosztunk, az egésznek nem egyenlő részeiből alkotott téglalap meg a felosztási pontok közötti vonal négyzete egyenlő a (vonal) felének a négyzetével.

Felezzük meg a tetszőleges AB egyenest C-ben és osszuk fel nem egyenlő részekre D-ben. Azt mondom, hogy az AD-ből, DB-ből alkotott téglalap meg a CD négyzete egyenlő a CB négyzetével.

Szerkesszük meg a CB-re a $CEFB$ négyzetet, húzzuk meg BE-t és a D-n át a CE, BF mindegyikével párhuzamos DG-t, a

H-n át pedig az AB, EF mindegyikével párhuzamos KM-et és viszont az A-n át a CL, BM mindegyikével párhuzamos AK-t. És minthogy a CH kiegészítő egyenlő a HF kiegészítővel, adjuk hozzá a közös DM-et. Az egész CM tehát egyenlő az egész DF-fel. A CM azonban egyenlő az AL-lel, minthogy az AC egyenlő a CB-vel. Az AL tehát egyenlő a DF-fel. Adjuk hozzá a közös CH-t. Az egész AH ennélfogva egyenlő az MNO gnomonnal. Az AH azonban az AD-ből, DB-ből alkotott téglalap. Mert DH egyenlő DB-vel. És így az MNO gnomon egyenlő az AD-ből, DB-ből alkotott téglalappal. Adjuk hozzá a közös LG-t, amely a CD négyzetével egyenlő. Így tehát az MNO gnomon meg az LG egyenlő az AD-ből, DB-ből alkotott téglalappal meg a CD négyzetével. Az MNO gnomon meg az LG azonban az egész $CEFB$ négyzettel egyenlő, amely a CB négyzete. Tehát az AD-ből, DB-ből alkotott téglalap meg a CD négyzete egyenlő a CB négyzetével.



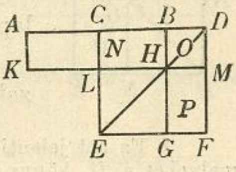
Ha tehát egy egyenes vonalat egyenlő és nem egyenlő részekre felosztunk, az egésznek nem egyenlő részeiből alkotott téglalap meg a felosztási pontok közötti vonal négyzete egyenlő a (vonal) felének a négyzetével. Ezt kellett bebizonyitanunk.

A tétel értelmezese mai jelölésünkkel:

$$x(a-x) + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

6.

Ha egy egyenes vonalat két egyenlő részre felosztunk és saját irányában egy más egyenest hozzája adunk, az egésznek meg a hozzáadottnak összegéből és a hozzáadottból alkotott téglalap meg a vonal felének a négyzete egyenlő a (vonal) felének meg a hozzáadottnak összegére rajzolt négyzettel.



Felezzük meg az AB egyenest C pontban és adjuk hozzája saját irányában a BD egyenest. Azt mondom, hogy az AD-ből, DB-ből alkotott téglalap meg a CB négyzete egyenlő a CD négyzetével.

Szerkesszük meg a CD-re a $CEFD$ négyzetet, húzzuk meg DE-t és a B ponton át az EC, DF mindegyikével párhuzamos BG-t, a H ponton át az AB, EF mindegyikével párhuzamos KM-et, továbbá pedig az A-n át a CL, DM mindegyikével párhuzamos AK-t.

Minthogy AC egyenlő CB-vel, AL is egyenlő CH-val. De CH egyenlő HF-fel. Igy tehát AL egyenlő HF-fel. Adjuk hozzá a közös CM-et. Az egész AM egyenlő tehát az NOP gnomonnal. De AM az AD-ből, DB-ből alkotott téglalap. Mert DM egyenlő DB-vel. Tehát az NOP gnomon is egyenlő az AD-ből, DB-ből alkotott téglalappal. Adjuk hozzá a közös LG-t, amely a BC négyzetével egyenlő. Igy tehát az AD-ből, DB-ből alkotott téglalap meg a CB négyzete egyenlő az NOP gnomonnal meg az LG-vel. Az NOP gnomon meg az LG azonban az egész $CEFD$ négyzettel egyenlő, amely a CD négyzete. Tehát az AD-ből, DB-ből alkotott téglalap meg a CB négyzete egyenlő a CD négyzetével.

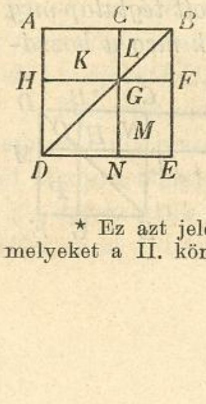
Ha tehát egy egyenes vonalat két egyenlő részre felosztunk és saját irányában egy más egyenest hozzája adunk, az egésznek meg a hozzáadottnak összegéből és a hozzáadottból alkotott téglalap meg a vonal felének a négyzete egyenlő a (vonal) felének meg a hozzáadottnak összegére rajzolt négyzettel. Ezt kellett bebizonyítanunk.

A tétel értelmezése mai jelölésünkkel:

$$(a+b)\,b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}+b\right)^2.$$

7.

Ha egy egyenes vonalat akárhogyan felosztunk, az egésznek a négyzete meg a részek egyikének a négyzete együttvéve egyenlő az egészből és a megnevezett részből alkotott téglalap kétszeresével meg a maradékrész négyzetével.



Osszuk fel az AB egyenest akárhogyan C pontban. Azt mondom, hogy az AB, BC négyzete egyenlő az AB-ből, BC-ből alkotott kétszeres téglalappal meg a CA négyzetével.

Szerkesszük meg az AB-re az $ADEB$ négyzetet. És rajzoljuk meg az idomot.*

* Ez azt jelenti: húzzuk meg az átlót és azokat a párhuzamosokat, melyeket a II. könyv 4. feladatától kezdve mindannyiszor meg kellett rajzolni.

Minthogy AG egyenlő GE-vel (I. 43.), adjuk hozzá a közös CF-et. Az egész AF tehát egyenlő az egész CE-vel. Az AF, CE tehát kétszerese az AF-nek. De AF, CE a KLM gnomon meg a CF négyzet. A KLM gnomon meg a CF négyzet tehát az AF kétszerese. Az AF kétszerese pedig az AB-ből, BC-ből alkotott kétszeres téglalap. Mert BF egyenlő BC-vel. Igy tehát a KLM gnomon meg a CF négyzet egyenlő az AB-ből, BC-ből alkotott kétszeres téglalappal. Adjuk hozzá a közös DG-t, mely az AC négyzete. Igy tehát a KLM gnomon meg a BG, GD négyzetek egyenlők az AB-ből, BC-ből alkotott kétszeres téglalappal meg az AC négyzetével. De a KLM gnomon meg a BG, GD négyzetei az egész $ADEB$ meg a CF, ami az AB négyzete meg a BC négyzete. Az AB négyzete meg a BC négyzete tehát egyenlő az AB-ből, BC-ből alkotott kétszeres téglalappal meg az AC négyzetével.

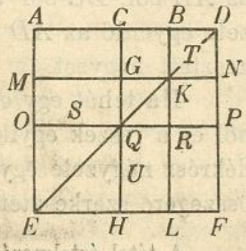
Ha tehát egy egyenes vonalat akárhogyan felosztunk, az egésznek a négyzete meg a részek egyikének a négyzete együttvéve egyenlő az egészből és a megnevezett részből alkotott téglalap kétszeresével meg a maradékrész négyzetével. Ezt kellett bebizonyítanunk.

A tétel értelmezése mai jelölésünkkel:

$$a^2+x^2=2ax+(a-x)^2.$$

8.

Ha egy egyenes vonalat akárhogyan felosztunk, az egészből és a részek egyikéből alkotott négyszeres téglalap meg a maradékrész négyzete egyenlő az egésznek meg a megnevezett résznek összegére szerkesztett négyzettel.



Osszuk fel az AB egyenest akárhogyan C pontban. Azt mondom, hogy az AB-ből, BC-ből alkotott négyszeres téglalap meg az AC négyzete egyenlő az AB, BC-re szerkesztett négyzettel.

Hosszabbítsuk meg saját irányában az AB egyenest BD-ig, tegyük egyenlővé CB-vel BD-t, szerkesszük meg az AD-re az $AEFD$ négyzetet és rajzoljuk meg kétszeresen az idomot.*

* Lásd a II. könyv 7. feladatának jegyzetét; a 8. feladatban azonban a rajz kibővítendő.

Minthogy CB egyenlő BD-vel, de CB a GK-val is egyenlő, BD pedig KN-nel, GK a KN-nel is egyenlő. Ugyanebből az okból QR is egyenlő RP-vel. És minthogy BC egyenlő BD-vel, GK pedig KN-nel, CK egyenlő KD-vel, GR pedig RN-nel. De CK egyenlő RN-nel. Mert kiegészítők a CP parallelogrammok (I. 43.). Tehát KD egyenlő GR-rel. A négy DK, CK, GR, RN tehát egymással egyenlő. A négy (parallelogramm) tehát a CK négyszerese. Viszont, minthogy CB egyenlő BD-vel, de BD a BK-val, valamint a CG-vel is egyenlő, CB pedig a GK-val, valamint a GQ-val is egyenlő, a CG a GQ-val is egyenlő. És minthogy CG egyenlő GQ-val, QR pedig RP-vel, AG is egyenlő MQ-val, QL pedig RF-fel. De MQ egyenlő QL-lel. Mert kiegészítők az ML parallelogrammok. Tehát AG egyenlő RF-fel. A négy AG, MQ, QL, RF tehát egymással egyenlő. A négy (parallelogramm) tehát az AG négyszerese. De bebizonyítottuk, hogy a négy CK, KD, GR, RN a CK négyszerese. Tehát a nyolc (parallelogramm) által származó STU gnomon az AK négyszerese. Az AK azonban az AB-ből, BD-ből alkotott téglalap. Mert BK egyenlő BD-vel. Az AB-ből, BD-ből alkotott négyszeres téglalap tehát az AK négyszerese. De bebizonyítottuk, hogy az AK négyszerese az STU gnomon. Az AB-ből, BD-ből alkotott négyszeres téglalap tehát egyenlő az STU gnomonnal. Adjuk hozzá a közös OH-t, mely egyenlő az AC négyzetével. Az AB-ből, BD-ből alkotott négyszeres téglalap meg az AC négyzete tehát egyenlő az STU gnomonnal meg OH-val. De az STU gnomon meg az OH az egész $AEFD$ négyzet, melyet AD-re szerkesztettünk. Az AB-ből, BD-ből alkotott négyszeres téglalap meg az AC négyzete tehát egyenlő az AD négyzetével. BD pedig egyenlő BC-vel. Igy tehát az AB-ből, BC-ből alkotott négyszeres téglalap meg az AC négyzete egyenlő az AD négyzetével, mely az AB és BC összegére szerkesztett négyzet.

Ha tehát egy egyenes vonalat akárhogyan felosztunk, az egészből és a részek egyikéből alkotott négyszeres téglalap meg a maradékrész négyzete egyenlő az egésznek meg a megnevezett résznek összegére szerkesztett négyzettel. Ezt kellett bebizonyítanunk.

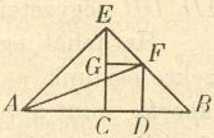
A tétel értelmezése mai jelölésünkkel:

$$4ax+(a-x)^2=(a+x)^2.$$

9.

Ha egy egyenes vonalat egyenlő és nem egyenlő részekre osztunk, az egész nem egyenlő részeinek négyzetei kétszer akkorák, mint a vonal felének a négyzete meg a felosztási pontok közötti vonal négyzete.

Felezzük meg a tetszőleges AB egyenest C-ben és osszuk fel nem egyenlő részekre D-ben. Azt mondom, hogy az AD és BD négyzetei kétszer akkorák, mint az AC és CD négyzetei.



Húzzuk meg C-n át az AB-re merőleges CE-t, tegyük azt az AC, CB valamelyikével egyenlővé, húzzuk meg EA-t, EB-t, húzzuk meg a D-n át az EC-vel párhuzamos DF-et, az F-en át pedig az AB-vel párhuzamos FG-t és húzzuk meg AF-et. És minthogy AC egyenlő CE-vel, az EAC szög is egyenlő az AEC-vel. És minthogy a C-nél fekvő szög derékszög, a másik két EAC, AEC szög is *egy* derékszöggel egyenlő (I. 32.). És egyenlők is. Tehát egy fél derékszöggel egyenlő a CEA, CAE szögek mindegyike. Ugyanebből az okból a CEB, EBC szögek mindegyike is egy fél derékszög. Az egész AEB szög tehát derékszög. És minthogy GEF a derékszög fele, EGF szög derékszög. Mert egyenlő az ECB belső és szemközt fekvő szöggel. Az EFG maradékszög tehát egy fél derékszög. A GEF szög tehát egyenlő az EFG szöggel. Ennélfogva az EG oldal is egyenlő a GF-fel. Viszont, minthogy a B-nél fekvő szög a derékszög fele, az FDB szög derékszög. Mert viszont egyenlő a belső és szemközt fekvő ECB szöggel (I. 29.). A BFD maradékszög tehát egy fél derékszög. A B-nél fekvő szög tehát egyenlő a DFB szöggel. Ennélfogva az FD oldal is egyenlő a DB-vel. És minthogy AC egyenlő CE-vel, AC négyzete is egyenlő CE négyzetével. Az AC, CE négyzete tehát kétszerese az AC négyzetének. De az AC, CE négyzete egyenlő az EA négyzetével. Mert az ACE szög derékszög (I. 47.). Az EA négyzete tehát az AC négyzetének kétszerese. Viszont, minthogy EG egyenlő GF-fel, az EG négyzete is egyenlő a GF négyzetével. Az EG, GF négyzete tehát kétszerese a GF négyzetének. De az EG, GF négyzete egyenlő az EF négyzetével. Az EF négyzete tehát a GF négyzetének kétszerese. GF pedig egyenlő CD-vel. Igy tehát EF négyzete a CD négyzetének kétszerese. Az EA négyzete pedig az AC négyzetének kétszerese. Igy tehát az AE, *EF* négyzetei kétszeresei az *AC, CD* négyzeteinek. De az *AE, EF* négyzete egyenlő az *AF* négyzetével. Mert az *AEF* szög derékszög (I. 47.). Tehát az *AF* négyzete kétszerese az *AC, CD* négyzeteinek. De az *AF* négyzete egyenlő az *AD, DF* négyzeteivel. Mert a *D*-nél fekvő szög derékszög (I. 47.). Az *AD, DF* négyzetei tehát kétszeresei az *AC, CD* négyzeteinek. *DF* pedig egyenlő *DB*-vel. Tehát az *AD, DB* négyzetei kétszeresei az *AC, CD* négyzeteinek.

Ha tehát egy egyenes vonalat egyenlő és nem egyenlő részekre osztunk, az egész nem egyenlő részeinek négyzetei kétszer akkorák, mint a vonal felének a négyzete meg a felosztási pontok közötti vonal négyzete. Ezt kellett bebizonyítanunk.

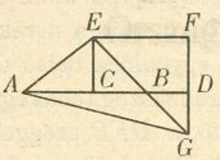
A tétel értelmezése mai jelölésünkkel:

$$x^2+(a-x)^2=2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right].$$

10.

Ha egy egyenes vonalat megfelezünk és saját irányában egy más egyenest hozzáadunk, az egésznek meg a hozzáadottnak összegére szerkesztett négyzet meg a hozzáadottnak a négyzete kétszer akkora, mint a vonal felének a négyzete meg a vonal felének meg a hozzáadottnak összegére szerkesztett négyzet.

Felezzük meg a tetszőleges *AB* egyenest *C*-ben és adjuk hozzá saját irányában a *BD* egyenest. Azt mondom, hogy az *AD* és a *DB* négyzete kétszer akkora, mint az *AC* és a *CD* négyzete.



Húzzuk meg *C* ponton át az *AB*-re merőleges *CE*-t, tegyük ezt az *AC, CB* mindegyikével egyenlővé és húzzuk meg *EA*-t, *EB*-t. És húzzuk meg az *E*-n át az *AD*-vel párhuzamos *EF*-et, a *D*-n át pedig a *CE*-vel párhuzamos *FD*-t. És minthogy az *EC, FD* párhuzamos egyeneseket az *EF* egyenes metszi, a *CEF, EFD* szögek két derékszöggel egyenlők (I. 29.). Igy tehát az *FEB, EFD* szögek két derékszögnél kisebbek. A két derékszögnél kisebb szögeket alkotó egyenesek pedig meghosszabbítva, találkoznak (V. poszt.). Igy tehát az *EB, FD* egyenesek meghosszabbítva, a *B, D* oldalán találkoznak. Hosszabbítsuk meg őket és találkozzanak *G*-ben; húzzuk meg *AG*-t. Minthogy *AC* egyenlő *CE*-vel, az *EAC* szög is egyenlő az *AEC*-vel. A *C*-nél fekvő szög derékszög. Fél derékszög tehát az EAC, AEC mindegyike. Ugyanebből az okból a CEB, EBC mindegyike is fél derékszög. És minthogy EBC fél derékszög, DBG is fél derékszög. BDG szög pedig derékszög. Mert egyenlő DCE-vel. Mivel váltószögek. A DGB maradékszög tehát fél derékszög. Tehát a DGB szög egyenlő a DBG-vel. Igy a BD oldal is egyenlő a GD oldallal. Viszont, minthogy az EGF fél derékszög, az F-nél fekvő szög derékszög. Mert egyenlő a C-nél fekvő szemközt fekvő szöggel. Az FEG maradékszög tehát fél derékszög. Az EGF szög tehát egyenlő az FEG-vel. Igy a GF oldal is egyenlő az EF oldallal. És minthogy EC egyenlő CA-val, az EC négyzete egyenlő a CA négyzetével. Az EC, CA négyzete tehát kétszerese a CA négyzetének. De az EC és CA négyzetei egyenlők az EA négyzetével. Igy tehát az EA négyzete kétszerese az AC négyzetének. Viszont, minthogy FG egyenlő EF-fel, az FG négyzete is egyenlő az EF négyzetével. Igy tehát a GF, FE négyzete kétszerese az EF négyzetének. De GF és az FE négyzete egyenlő az EG négyzetével. Igy tehát az EG négyzete kétszerese az EF négyzetének. Az EG négyzete tehát kétszerese a CD négyzetének. De bebizonyítottuk, hogy EA négyzete kétszerese az AC négyzetének. Az AE és az EG négyzetei tehát kétszer akkorák, mint az AC és CD négyzetei. De az AE és az EG négyzete egyenlő az AG négyzetével. Igy tehát az AG négyzete kétszer akkora, mint az AC és a CD négyzete. De az AG négyzete egyenlő az AD és a DG négyzetével. Igy tehát az AD és a DG négyzete kétszer akkora, mint az AC és a CD négyzete. A DG pedig egyenlő DB-vel. Igy tehát az AD és a DB négyzete kétszer akkora, mint az AC és a CD négyzete.

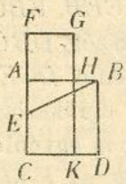
Ha tehát egy egyenes vonalat megfelezünk és saját irányában egy más egyenest hozzáadunk, az egésznek meg a hozzáadottnak összegére szerkesztett négyzet meg a hozzáadottnak a négyzete kétszer akkora, mint a vonal felének a négyzete meg a vonal felének meg a hozzáadottnak összegére szerkesztett négyzet. Ezt kellett bebizonyítanunk.

A tétel értelmezése mai jelölésünkkel:

$$(a+b)^2+b^2=2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+b\right)^2\right].$$

11.

Adott egyenest osszunk fel úgy, hogy az egészből és a részek egyikéből alkotott téglalap egyenlő legyen a másik rész négyzetével.



Legyen az adott egyenes AB. Osszuk fel tehát az AB-t úgy, hogy az egészből és a részek egyikéből alkotott téglalap egyenlő legyen a másik rész négyzetével.

Szerkesszük meg az AB-re az $ABCD$ négyzetet, felezzük meg az AC-t E pontban, húzzuk meg BE-t, hosszabbítsuk meg CA-t F-ig, tegyük BE-vel egyenlővé EF-et, szerkesszük meg az AF-re az FH négyzetet és húzzuk meg GH-t K-ig. Azt mondom, az AB-t úgy osztottuk fel H-ban, hogy az AB-ből, BH-ból alkotott téglalap egyenlő az AH négyzetével.

Minthogy az AC egyenest megfeleztük E-ben, FA-val pedig meghosszabbítottuk, a CF-ből, FA-ból alkotott téglalap meg az AE négyzete egyenlő az EF négyzetével (II. 6.). EF pedig egyenlő EB-vel. Igy tehát a CF-ből, FA-ból alkotott téglalap meg az AE négyzete egyenlő az EB négyzetével. De EB négyzete egyenlő a BA és az AE négyzeteivel. Mert az A-nál fekvő szög derékszög. Igy tehát a CF-ből, FA-ból alkotott téglalap meg az AE négyzete egyenlő a BA és az AE négyzeteivel. Vonjuk le a közös AE négyzetét. A maradék tehát, a CF-ből, FA-ból alkotott téglalap egyenlő az AB négyzetével. És a CF-ből, FA-ból alkotott téglalap az FK. Mert AF egyenlő FG-vel. Az AB négyzete pedig az AD. Igy tehát FK egyenlő AD-vel. Vonjuk le a közös AK-t. A maradék FH tehát egyenlő a HD-vel. A HD pedig az AB-ből, BD-ből alkotott téglalap. Mert az AB egyenlő a BD-vel. Az FH pedig az AH négyzete. Igy tehát az AB-ből, BH-ból alkotott téglalap egyenlő a HA négyzetével.

Az adott AB egyenest tehát úgy osztottuk fel H-ban, hogy az AB-ből, BH-ból alkotott téglalap egyenlő a HA négyzetével. Ezt kellett elvégeznünk.

A feladat értelmezése mai jelölésünkkel:

$$ax = (a-x)^2.$$

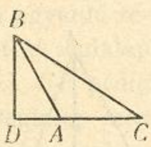
Az ú. n. *aranymetszés (sectio aurea)* vagy folytonos arányban való metszés.

12.

A tompaszögű háromszögekben a tompa szöget átfogó oldal négyzete a tompa szöget befogó oldalok négyzeteinél a tompa szöget befogó oldalok egyikéből (melyre a merőleges esik) és a merő-

leges által kint a tompaszögnél elmetszett darabból alkotott kétszeres téglalappal nagyobb.

Legyen az ABC tompaszögű háromszögnek tompa szöge BAC és húzzuk meg a B pontból a CA meghosszabbitására a BD merőlegest. Azt mondom, hogy a BC négyzete a BA és az AC négyzeteinél a CA-ból, BD-ből alkotott kétszeres téglalappal nagyobb.



Minthogy a CD egyenest akárhogyan A pontban felosztottuk, a DC négyzete egyenlő a CA és az AD négyzeteivel meg a CA-ból, AD-ből alkotott kétszeres téglalappal (II. 4.). Adjuk hozzá a közös DB négyzetét. Igy tehát a CD és DB négyzete egyenlő a CA, az AD és a DB négyzetével meg a CA-ból, AD-ből alkotott kétszeres téglalappal. De a CD és a DB négyzete egyenlő a CB négyzetével. Mert a D-nél fekvő szög derékszög. Az AD és a DB négyzete pedig egyenlő az AB négyzetével. Igy tehát a CB négyzete egyenlő a CA és az AB négyzetével meg a CA-ból, AD-ből alkotott kétszeres téglalappal. Ennélfogva a CB négyzete a CA és az AB négyzeteinél a CA-ból, AD-ből alkotott kétszeres téglalappal nagyobb.

Tehát a tompaszögű háromszögekben a tompa szöget átfogó oldal négyzete a tompa szöget befogó oldalok négyzeteinél a tompa szöget befogó oldalok egyikéből (melyre a merőleges esik) és a merőleges által kint a tompaszögnél elmetszett darabból alkotott kétszeres téglalappal nagyobb. Ezt kellett bebizonyítanunk.

A feladat értelmezése mai jelölésünkkel:

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2bx.$$

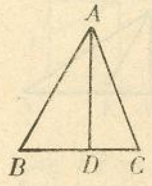
Minthogy $x = c \,.\, \cos(180^\circ - \alpha) = -c \,.\, \cos\alpha$, ez behelyettesítve *Carnot képletét* adja:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \,.\, \cos\alpha.$$

13.

A hegyesszögű háromszögekben a hegyes szöget átfogó oldal négyzete a hegyes szöget befogó oldalok négyzeteinél a hegyes szöget befogó oldalok egyikéből (melyre a merőleges esik) és a merőleges által bent a hegyes szögnél elmetszett darabból alkotott kétszeres téglalappal kisebb.

Legyen az ABC hegyesszögű háromszögnek hegyes szöge a B-nél és húzzuk meg az A ponton át a BC-re merőleges AD-t. Azt mondom, hogy az AC négyzete a CB és a BA négyzeteinél a CB-ből, BD-ből alkotott kétszeres téglalappal kisebb.



Minthogy a CD egyenest akárhogyan D-ben felosztottuk, a CB és a BD négyzete egyenlő a CB-ből, DB-ből alkotott kétszeres téglalappal meg a DC négyzetével (II. 7.). Adjuk hozzá a közös DA négyzetét. Igy tehát a CB, a BD és a DA négyzete egyenlő a CB-ből, BD-ből alkotott kétszeres téglalappal meg az AD és a DC négyzeteivel. De a BD és a DA négyzete egyenlő az AB négyzetével. Mert a D-nél fekvő szög derékszög. Az AD és a DC négyzete pedig egyenlő az AC négyzetével. Igy tehát a CB és a BA négyzete egyenlő az AC négyzetével meg a CB-ből, BD-ből alkotott kétszeres téglalappal. Ennélfogva az AC négyzete a CB és a BA négyzeteinél a CB-ből, BD-ből alkotott kétszeres téglalappal kisebb.

Tehát a hegyesszögű háromszögekben a hegyes szöget átfogó oldal négyzete a hegyes szöget befogó oldalok négyzeteinél a hegyes szöget befogó oldalok egyikéből (melyre a merőleges esik) és a merőleges által bent a hegyes szögnél elmetszett darabból alkotott kétszeres téglalappal kisebb. Ezt kellett bebizonyítanunk.

A feladat értelmezése mai jelölésünkkel:

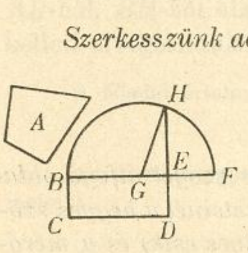
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax.$$

Minthogy $x = c \,.\, \cos\beta$, ez behelyettesítve szintén *Carnot képletét* adja:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos\beta.$$

14.

Szerkesszünk adott egyenesvonalú idommal egyenlő négyzetet.



Legyen az adott egyenesvonalú idom A. Szerkesszünk ezzel az A egyenesvonalú idommal egyenlő négyzetet.

Szerkesszük meg az A egyenesvonalú idommal egyenlő BD téglalapot (I. 45.). Ha ebben BE egyenlő ED-vel, máris elvégeztük a feladatot. Mert megszerkesztettük az A egyenesvonalú idommal egyenlő BD négyzetet. Ha pedig nem, akkor a BE, ED egyike nagyobb. Legyen a nagyobb a BE, hosszabbítsuk ezt meg F-ig, tegyük ED-vel egyenlővé EF-et, felezzük meg BF-et G-ben, rajzoljuk meg

G középpont körül a GB, GF sugarak egyikével a BHF félkört, hosszabbítsuk meg DE-t H-ig és húzzuk meg GH-t.

Minthogy a BF egyenest megfeleztük G-ben, nem egyenlő részekre pedig felosztottuk E-ben, a BE-ből, EF-ből alkotott téglalap meg az EG négyzete egyenlő a GF négyzetével (II. 5.). GF pedig egyenlő GH-val. Igy tehát a BE-ből, EF-ből alkotott téglalap meg a GE négyzete egyenlő a GH négyzetével. A GH négyzete azonban egyenlő a HE és az EG négyzetével. Igy tehát a BE-ből, EF-ből alkotott téglalap meg a GE négyzete egyenlő a HE és az EG négyzetével. Vonjuk le a közös GE négyzetet. Igy tehát a BE-ből, EF-ből alkotott téglalap egyenlő az EH négyzetével. De a BE-ből, EF-ből alkotott téglalap a BD. Mert EF egyenlő ED-vel. Igy tehát a BD téglalap egyenlő a HE négyzetével. A BD pedig az A egyenesvonalú idommal egyenlő. Igy tehát az A egyenesvonalú idom az EH-ra szerkesztett négyzettel is egyenlő.

Tehát az adott A egyenesvonalú idommal egyenlő négyzetet szerkesztettünk az EH-ra. Ezt kellett elvégeznünk.

A mértani középarányos szerkesztése.

III. KÖNYV.

Definiciók.

I. Egyenlő körök azok, melyeknek átmérői egyenlők, vagy a melyeknek sugarai egyenlők.

II. Azt mondjuk, hogy egy egyenes a kört érinti, ha a kört éri és meghosszabbítva nem metszi a kört.

III. Azt mondjuk, hogy a körök érintik egymást, ha egymást érve, nem metszik egymást.

IV. Azt mondjuk, hogy a körben a középponttól egyenlő távolságban az egyenesek akkor vannak, ha a középpontból rájuk bocsátott merőlegesek egyenlők.

V. Nagyobb távolságra levőnek pedig azt mondjuk, amelyre nagyobb merőleges esik.

VI. Körszelet az az idom, melyet egy egyenes és a kör kerülete * befog.

VII. A körszelet szöge az, melyet az egyenes és a kör kerülete befog.

VIII. Kerületi szög pedig az, melyet a körszelet kerületében felvett valamely pontból az egyenesnek: a *körszelet alapjának* végpontjaihoz húzott egyenesek befognak.

IX. Amikor pedig a szöget befogó egyenesek a kerületet elvágják, azt mondjuk, a szög arra támaszkodik.

X. A körcikk az az idom, melyet, a kör középpontjában szöget szerkesztve, a szöget alkotó egyenesek és az általuk elmetszett körív határol.

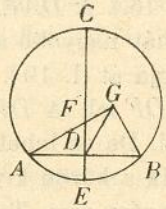
XI. Hasonló körszeletek azok, melyek egyenlő szögeket foglalnak magukban, vagy amelyekben egymással egyenlő szögek vannak.

* Helyesebben: a kör íve; Euklides nem különbözteti meg a két fogalmat: *kerület* és *ív*, nála mindkettő: *περιφέρεια*.

1.

Találjuk meg adott körnek a középpontját.

Legyen az adott kör ABC. Ennek az ABC körnek találjuk meg a középpontját.



Húzzuk meg benne, akárhogyan az AB egyenest, felezzük ezt meg D pontban, emeljük a D-n át az AB-re merőleges DC-t, hosszabbítsuk ezt meg E-ig és felezzük meg CE-t F-ben. Azt mondom, hogy az F az ABC (kör) középpontja.

Mert ne legyen az, hanem, ha lehet, legyen G az és húzzuk meg GA-t, GD-t, GB-t. És minthogy AD egyenlő DB-vel, a DG pedig közös, a két AD, DG is külön-külön egyenlő a két GD-vel, DB-vel. És a GA alap is egyenlő a GB alappal. Mert sugarak. Igy tehát az ADG szög egyenlő a GDB szöggel (I. 8.). Amikor azonban egy egyenes egy másik egyenesen úgy áll, hogy a mellékszögek egymással egyenlők, az egyenlő szögek mindegyike derékszög (I. X. def.). Igy tehát a GDB szög derékszög. De FDB is derékszög. Az FDB tehát egyenlő a GDB-vel, a nagyobbik a kisebbikkel. De ez lehetetlen. G tehát nem középpontja az ABC körnek. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy más sem lehet F-en kívül.

Tehát az F pont az ABC (kör) középpontja.

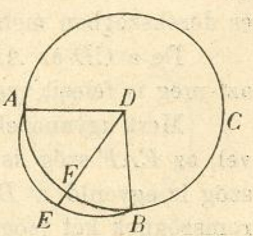
Porizma (következmény).

Ebből kitünik, hogyha a körben egy egyenes egy más egyenest derékszögben megfelez, ebben a felezőben van a kör középpontja. — Ezt kellett elvégeznünk.

2.

Ha a kör kerületében felveszünk két tetszőleges pontot, a pontokat összekötő egyenes a körön belül esik.

Legyen a kör ABC és ennek kerületén vegyünk fel két tetszőleges pontot, A-t, B-t. Azt mondom, hogy az A-t a B-vel összekötő egyenes a körön belül esik.



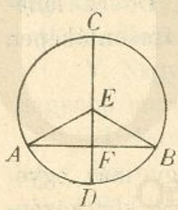
Mert ne essék oda, hanem, ha lehet, essék kívül AEB-be; határozzuk meg az ABC kör középponját, legyen ez D, húzzuk meg DA-t, DB-t és húzzuk meg DFE-t.

Minthogy DA egyenlő DB-vel, a DAE szög is egyenlő a DBE szöggel (I. 5.). És minthogy a DAE háromszögnek egyik meghosszabbított oldala AEB, a DEB szög nagyobb a DAE szögnél (I. 16.). A DAE szög pedig egyenlő a DBE szöggel. A DEB szög tehát nagyobb a DBE-nél. A nagyobb szöget pedig nagyobb oldal fogja át (I. 19.). A BD tehát nagyobb a DE-nél. A DB pedig egyenlő a DF-fel. A DF tehát nagyobb a DE-nél, a kisebbik a nagyobbikkal. De ez lehetetlen. Tehát az A-t a B-vel összekötő egyenes nem esik a körön kívül. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a kerületre magára sem. Tehát belül.

Ha tehát a kör kerületében felveszünk két tetszőleges pontot, a pontokat összekötő egyenes a körön belül esik. Ezt kellett bebizonyítanunk.

3.

Ha a körben a középponton átmenő egyenes egy, nem a középponton átmenő egyenest megfelez, azt derékszögben metszi. És ha azt derékszögben metszi, azt meg is felezi.



Legyen a kör ABC, és benne a középponton átmenő CD egyenes felezze meg a nem a középponton átmenő AB egyenest F pontban. Azt mondom, hogy derékszögben metszi.

Mert határozzuk meg az ABC kör középpontját; legyen ez E és húzzuk meg EA-t, EB-t.

Minthogy AF egyenlő FB-vel, közös pedig az FE, a két-két egyenes egyenlő. És az EA alap egyenlő az EB alappal. Tehát az AFE szög egyenlő a BFE-vel (I. 8.). Amikor azonban egy egyenes egy másik egyenesen úgy áll, hogy a mellékszögek egymással egyenlők, ezek mindegyike derékszöggel egyenlő (I. X. def.). Az AFE, BFE szögek mindegyike tehát derékszög. Tehát a középponton átmenő CD a nem a középponton átmenő AB-t megfelezi és derékszögben metszi.

De a CD az AB-t derékszögben metszi. Azt mondom, hogy azt meg is felezi, vagyis, hogy AF egyenlő FB-vel.

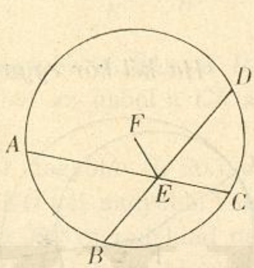
Mert ugyanezeket összehasonlítva, minthogy EA egyenlő EB-vel, az EAF szög is egyenlő az EBF szöggel. És az AFE derékszög is egyenlő a BFE derékszöggel. Tehát a két EAF, EFB háromszögnek két szöggel egyenlő két szöge van és az egyik oldal az egyik oldallal egyenlő, a közös EF, mely az egyenlő szögeket átfogja. És így a másik két oldal is egyenlő a másik két oldallal (I. 26.). Tehát AF egyenlő FB-vel.

Ha tehát a körben a középponton átmenő egyenes egy, nem a középponton átmenő egyenest megfelez, azt derékszögben metszi. És ha azt derékszögben metszi, azt meg is felezi. Ezt kellett bebizonyítanunk.

4.

Ha a körben két, nem a középponton átmenő egyenes egymást metszi, nem felezik meg egymást.

Legyen a kör $ABCD$ és benne a két, nem a középponton átmenő AC, BD messe egymást E pontban. Azt mondom, hogy nem felezik meg egymást.



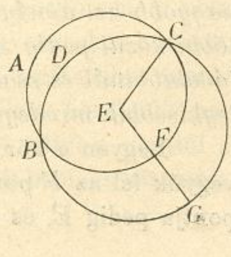
Mert, ha lehet, felezzék meg egymást, úgy hogy AE egyenlő legyen EC-vel, BE pedig ED-vel. Határozzuk meg az $ABCD$ kör középpontját; legyen ez F és húzzuk meg FE-t.

Minthogy a középponton átmenő FE egyenes a nem a középponton átmenő AC egyenest megfelezi, azt derékszögben metszi (III. 3.). Az FEA szög tehát derékszög. Viszont, minthogy az FE egyenes a BD egyenest megfelezi, azt derékszögben metszi. Az FEB szög tehát derékszög. Bebizonyítottuk pedig azt is, hogy az FEA szög derékszög. Az FEA szög tehát egyenlő az FEB-vel, a kisebbik a nagyobbikkal. De ez lehetetlen. Tehát az AC, BD egyenesek nem felezik egymást.

Ha tehát a körben két, nem a középponton átmenő egyenes egymást metszi, nem felezik meg egymást. Ezt kellett bebizonyítanunk.

5.

Ha két kör egymást metszi, középpontjuk nem ugyanaz.



A két ABC, BDG kör messe egymást B, C pontokban. Azt mondom, hogy középpontjuk nem ugyanaz.

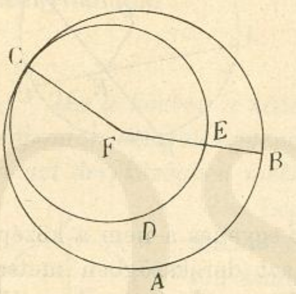
Mert, ha lehet, legyen az E; húzzuk meg EC-t és húzzuk meg EFG-t akárhogyan.

És minthogy E pont középpontja az ABC körnek, EC egyenlő EF-fel. Viszont, minthogy az E pont középpontja a CDG körnek, EC egyenlő EG-vel. Bebizonyítottuk pedig azt is, hogy EC egyenlő EF-fel. Igy tehát EF az EG-vel is egyenlő, a kisebbik a nagyobbikkal. De ez lehetetlen. Az E pont tehát nem középpontja az ABC, CDG köröknek.

Ha tehát két kör egymást metszi, középpontjuk nem ugyanaz. Ezt kellett bebizonyítanunk.

6.

Ha két kör egymást érinti, középpontjuk nem ugyanaz.



A két ABC, CDE kör érintse egymást C pontban. Azt mondom, hogy középpontjuk nem ugyanaz.

Mert, ha lehet, legyen az F; húzzuk meg FC-t és húzzuk meg FEB-t akárhogyan.

Minthogy az F pont középpontja az ABC körnek, FC egyenlő FB-vel. Viszont, minthogy az F pont középpontja a CDE körnek, FC egyenlő FE-vel. De bebizonyítottuk, hogy FC egyenlő FB-vel. Igy tehát FE az FB-vel is egyenlő, a kisebbik a nagyobbikkal. De ez lehetetlen. Az F pont tehát nem középpontja az ABC, CDE köröknek.

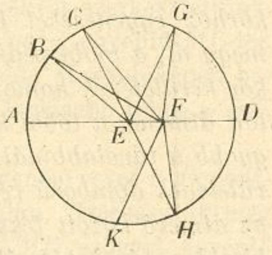
Ha tehát két kör egymást érinti, középpontjuk nem ugyanaz. Ezt kellett bebizonyítanunk.

7.

Ha a kör átmérőjében felveszünk egy pontot, mely nem a kör középpontja, e pontból pedig a körhöz egyeneseket húzunk, a legnagyobb az, amelyben a középpont van, a legkisebb a maradék, a többi közül pedig a középponton átmenőhöz közelebbi nagyobb a távolabbinál és csak két egyenlő vezet attól a ponttól a körhöz a legkisebbik mindegyik oldalán.

Legyen a kör $ABCD$, ennek átmérője legyen AD, az AD-ben vegyük fel az F pontot, mely nem a kör középpontja, a kör középpontja pedig E, és az F-ből húzzuk meg az $ABCD$ körhöz az FB,

FC, FG egyeneseket. Azt mondom, hogy a legnagyobb az FA, a legkisebb az FD, a többiek közűl pedig FB nagyobb FC-nél és FC nagyobb FG-nél.



Húzzuk meg a BE-t, CE-t GE-t. Minthogy minden háromszögben két oldal a harmadiknál nagyobb (I. 20.), EB, EF nagyobb mint BF. AE pedig egyenlő BE-vel (tehát BE, EF egyenlő AF-fel). Az AF tehát nagyobb a BF-nél. Viszont, minthogy BE egyenlő CE-vel, közös pedig az FE, a két BE, EF a két CE-vel, EF-fel egyenlő. De a BEF szög a CEF szögnél nagyobb (I. 24.). A BF alap tehát a CF alapnál nagyobb. Ugyanebből az okból a CF az FG-nél nagyobb.

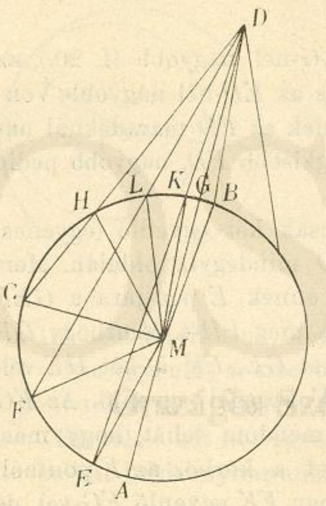
Másrészt, minthogy GF, FE az EG-nél nagyobb (I. 20.), az EG pedig egyenlő az ED-vel, GF, FE is az ED-nél nagyobb. Vonjuk le a közös EF-et. Tehát a GF maradék az FD maradéknál nagyobb. Igy tehát FA a legnagyobb, a legkisebb FD, nagyobb pedig az FB az FC-nél és az FC az FG-nél.

Azt mondom, hogy az F pontból csak két egyenlő (egyenes) vezet az $ABCD$ körhöz a legkisebb FD mindegyik oldalán. Mert szerkesszük meg az EF egyenesre és ennek E pontjára a GEF szöggel egyenlő FEH-t (I. 23.) és húzzuk meg FH-t. Minthogy GE egyenlő EH-val, közös pedig az EF, a két GE, EF a két HE-vel, EF-fel egyenlő. És a GEF szög a HEF szöggel egyenlő. Az FG alap tehát az FH alappal egyenlő. Azt mondom tehát, hogy más, az FG-vel egyenlő (egyenes) nem vezet a körhöz az F pontból. Mert ha lehet, vezessen oda FK. Minthogy FK egyenlő FG-vel, de FH is (egyenlő) FG-vel, FK egyenlő FH-val, a középponton átmenőhöz közelebbi a távolabbival. De ez lehetetlen. Tehát az F pontból más, a GF-fel egyenlő (egyenes) a körhöz nem vezet. Tehát csak egy.

Ha tehát a kör átmérőjében felveszünk egy pontot, mely nem a kör középpontja, e pontból pedig a körhöz egyeneseket húzunk, a legnagyobb az, amelyben a középpont van, a legkisebb a maradék, a többi közül pedig a középponton átmenőhöz közelebbi nagyobb a távolabbinál és csak két egyenlő vezet attól a ponttól a körhöz a legkisebbik mindegyik oldalán. Ezt kellett bebizonyítanunk.

8.

Ha a körön kívül felveszünk egy pontot, e pontból pedig a körhöz egyeneseket húzunk, amelyek közül egyik a középponton megy át, a többi pedig akárhogyan, az egyenesek közül, melyek a kör kerületének homorú részét elvágják, a legnagyobb a középponton átmenő, a többi közül a középponton átmenőhöz közelebbi nagyobb a távolabbinál, az egyenesek közül pedig, melyek a kör kerületének domború részét elvágják, a legkisebb az, mely a pont és az átmérő között fekszik, a többi közül a legkisebbhez közelebbi kisebb a távolabbinál és csak két egyenlő vezet attól a ponttól a körhöz a legkisebbik mindegyik oldalán.



Legyen a kör *ABC*; az *ABC*-n kívül vegyünk fel egy *D* pontot és ebből húzzuk meg a tetszőleges *DA*, *DE*, *DF*, *DC* egyeneseket, *DA* pedig menjen át a középponton. Azt mondom, hogy az egyenesek közül, melyek a kerület homorú *AEFC* részét elvágják, a legnagyobb a középponton átmenő *DA*, nagyobb pedig a *DE* a *DF*-nél és a *DF* a *DC*-nél, az egyenesek közül pedig, melyek a kerület domború *HLKG* részét elvágják, a legkisebb a *DG*, mely a pont és az *AG* átmérő között fekszik, a *DG*-hez közelebbi pedig kisebb a távolabbinál, a *DK* a *DL*-nél és a *DL* a *DH*-nál.

Vegyük fel az *ABC* kör középpontját és legyen ez *M*. És húzzuk meg az *ME*, *MF*, *MC*, *MK*, *ML*, *MH* egyeneseket.

Minthogy *AM* egyenlő *EM*-mel, adjuk hozzá a közös *MD*-t. *AD* tehát egyenlő *EM*-mel meg *MD*-vel. De *EM*, *MD* nagyobb *ED*-nél (I. 20.). Igy tehát *AD* is nagyobb *ED*-nél. Viszont, minthogy *ME* egyenlő *MF*-fel, közös pedig az *MD*, *EM*, *MD* egyenlő *FM*, *MD*-vel. És az *EMD* szög nagyobb az *FMD* szögnél. Az *ED* alap az *FD* alapnál nagyobb (I. 24.). Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy *FD* nagyobb *CD*-nél. A legnagyobb tehát a *DA*, a *DE* nagyobb a *DF*-nél és a *DF* a *DC*-nél.

És minthogy *MK*, *KD* az *MD*-nél nagyobb (I. 20.) és *MG* egyenlő *MK*-val, a *KD* maradék a *GD* maradéknál nagyobb. Ennélfogva a *GD* a *KD*-nél kisebb. És minthogy az *MLD* háromszögben az egyik *MD* oldalra két belső *MK*, *KD* egyenest szerkesztettünk, *MK*, *KD* kisebb, mint *ML*, *LD* (I. 21.). *MK* pedig egyenlő *ML*-lel. A *DK* maradék tehát a *DL* maradéknál kisebb. Hasonlóképen bebizonyitjuk, hogy a *DL* a *DH*-nál kisebb. A legkisebb tehát a *DE*, a *DK* kisebb a *DL*-nél és a *DL* a *DH*-nál.

Azt mondom, hogy csak két egyenlő (egyenes) vezet a *D* pontból a körhöz a legkisebb *DG* mindegyik oldalán. Szerkesszük meg az *MD* egyenesre és ennek *M* pontjára a *KMD* szöggel egyenlő *DMB* szöget és húzzuk meg *DB*-t. Minthogy *MK* egyenlő *MB*-vel, közös pedig az *MD*, a két *KM*, *MD* a két *BM*-mel, *MD*-vel egyenlő külön-külön. És a *KMD* szög a *BMD* szöggel egyenlő. A *DK* alap tehát a *DB* alappal egyenlő (I. 4.). Azt mondom, hogy más, a *DK* egyenessel egyenlő (egyenes) nem vezet a körhöz a *D* pontból. Mert, ha lehet, vezessen oda *DN*. Minthogy *DK* egyenlő *DN*-nel, de *DK* is (egyenlő) *DB*-vel, *DB* is egyenlő *DN*-nel, a legkisebb *DG*-hez közelebbi a távolabbival. De ez lehetetlen. Tehát kettőnél több egyenlő (egyenes) nem vezet az *ABC* körhöz a *D* pontból a legkisebb *DG* mindegyik oldalán.

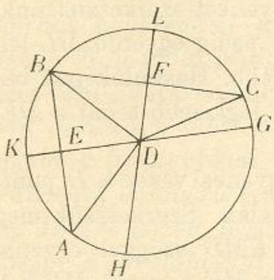
Ha tehát a körön kívül felveszünk egy pontot, e pontból pedig a körhöz egyeneseket húzunk, amelyek közül egyik a középponton megy át, a többi pedig akárhogyan, az egyenesek közül, melyek a kör kerületének homorú részét elvágják, a legnagyobb a középponton átmenő, a többi közül a középponton átmenőhöz közelebbi nagyobb a távolabbinál, az egyenesek közül pedig, melyek a kör kerületének domború részét elvágják, a legkisebb az, mely a pont és az átmérő között fekszik, a többi közül a legkisebbhez közelebbi kisebb a távolabbinál és csak két egyenlő vezet attól a ponttól a körhöz a legkisebbik mindegyik oldalán. Ezt kellett bebizonyitanunk.

9.

Ha a körön belül felveszünk egy pontot, e pontból pedig a körhöz kettőnél több egyenlő egyenest húzunk, a felvett pont a kör középpontja.

Legyen a kör *ABC*, a benne levő pont *D* és a *D*-ből az *ABC* körhöz kettőnél több *DA*, *DB*, *DC* egyenlő egyenest húzunk. Azt mondom, hogy a *D* pont középpontja az *ABC* körnek.

Húzzuk meg az AB-t, AC-t, felezzük meg őket az E, F pontokban és húzzuk meg az ED, FD egyeneseket a G, K, H, L pontokig.

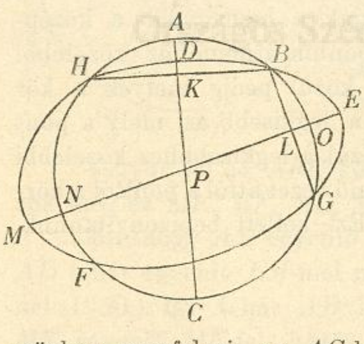


Minthogy AE egyenlő EB-vel, közös pedig az ED, a két AE, ED a két BE-vel, ED-vel egyenlő. És a DA alap a DB alappal egyenlő. AED szög tehát egyenlő a BED szöggel (I. 8.). Az AED, BED szögek mindegyike tehát derékszög (I. X. def.). A GK tehát az AB-t derékszögben felezi meg. És minthogy, ha a körben egy egyenes egy más egyenest derékszögben megfelez, ebben a felezőben van a kör középpontja (III. 1. porizma), GK-ban van a kör középpontja. Ugyanebből az okból HL-ben is van az ABC kör középpontja. És más közös pontjuk nincs a GK, HL egyeneseknek, mint a D pont. A D pont tehát az ABC kör középpontja.

Ha tehát a körön belül felveszünk egy pontot, e pontból pedig a körhöz kettőnél több egyenlő egyenest húzunk, a felvett pont a kör középpontja. Ezt kellett bebizonyítanunk.

10.

Kör a kört nem metszi kettőnél több pontban.



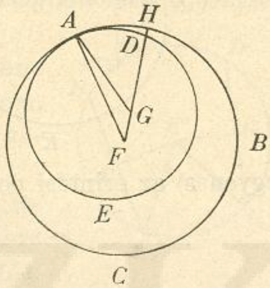
Mert ha lehet, messe az ABC kör a DEF kört kettőnél több pontban, B-ben, G-ben, F-ben, H-ban és felezzük meg a BH, BG egyeneseket K, L pontokban. A K és L pontokon át emeljük a BH-ra, BG-re merőleges KC, LM egyeneseket és húzzuk meg ezeket az A, E pontokig.

Minthogy az ABC körben az AC egyenes a BD egyenest derékszögben megfelezi, az AC-ben van az ABC kör középpontja (III. 1. porizma). Viszont, minthogy ugyanabban az ABC körben az NO egyenes a BG egyenest derékszögben megfelezi, tehát az NO-ban is van az ABC kör középpontja. De bebizonyítottuk, hogy AC-ben is van, más pontban azonban nem találkoznak az AC, NO egyenesek, mint P-ben. Tehát a P pont az ABC kör középpontja. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a DEF kör középpontja is P. Tehát a két egymást metsző ABC, DEF körnek ugyanaz a középpontja P. Ez pedig lehetetlen (III. 5.).

Tehát kör a kört nem metszi kettőnél több pontban. Ezt kellett bebizonyítanunk.

11.

Ha két kör egymást belül érinti és felvettük középpontjaikat, a középpontjaikat összekötő egyenes meghosszabbítva, a körök érintési pontjába esik.



A két ABC, ADE kör érintse egymást belül az A pontban és vegyük fel az ABC kör középpontját F-ben, az ADE-ét pedig G-ben. Azt mondom, hogy az F-et a G-vel összekötő egyenes meghosszabbítva az A-ba esik.

Mert ne essék oda, hanem, ha lehet, essék FGH-ba és húzzuk meg AF-et, AG-t.

Minthogy az AG meg a GF az FA-nál (I. 20.), úgyszintén az FH-nál nagyobb, vonjuk le a közös FG-t. Az AG maradék tehát a GH maradéknál nagyobb. AG pedig egyenlő GD-vel. És így a GD a GH-nál nagyobb, a kisebbik a nagyobbiknál. De ez lehetetlen. Igy tehát az F-et, G-t összekötő egyenes nem esik kívül. Tehát az A érintési pontba esik.

Ha tehát két kör egymást belül érinti (és felvettük középpontjaikat), a középpontjaikat összekötő egyenes (meghosszabbítva) a körök érintési pontjába esik. Ezt kellett bebizonyítanunk.

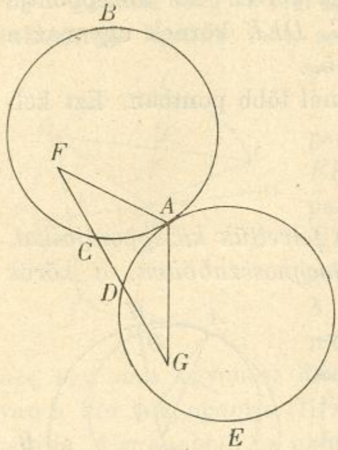
12.

Ha két kör egymást kívül érinti, a középpontjaikat összekötő egyenes az érintési ponton megy át.

A két ABC, ADE kör érintse egymást kívül az A pontban és vegyük fel az ABC kör középpontját F-ben, az ADE-ét pedig G-ben. Azt mondom, hogy az F-et a G-vel összekötő egyenes az A érintési ponton megy át.

Mert ne menjen azon át, hanem, ha lehet, essék $FCDG$-be és húzzuk meg AF-et, AG-t.

Minthogy az F pont középpontja az ABC körnek, FA egyenlő

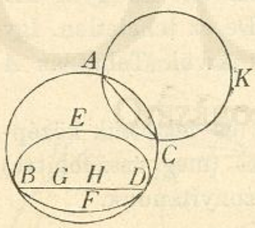


FC-vel. Viszont, minthogy a *G* pont középpontja az *ADE* körnek, *GA* egyenlő *GD*-vel. De bebizonyitottuk, hogy *FA* egyenlő *FC*-vel. Tehát az *FA* meg az *AG* egyenlő az *FC*-vel meg *GD*-vel. Ennélfogva az egész *FG* nagyobb, mint az *FA* meg az *AG*. Pedig kisebb (I. 20.). De ez lehetetlen. Igy tehát az *F*-et a *G*-vel összekötő egyenes az *A* érintési ponton kívül nem esik. Tehát rajta megy át.

Ha tehát két kör egymást kívül érinti, a középpontjaikat összekötő (egyenes) az érintési ponton megy át. Ezt kellett bebizonyitanunk.

13.

Kör a kört nem érinti egynél több pontban, akár belül, akár kívül érinti.



Mert, ha lehet, érintse az *ABCD* kör az *EBFD* kört először belül egynél több, *D*, *B* pontokban.

Vegyük fel az *ABCD* kör középpontját *G*-ben, az *EBFD*-ét pedig *H*-ban.

Tehát a *G*-t, *H*-t összekötő (egyenes) a *B*-be, *D*-be esik (III. 11.). Essék *BGHD*-be. És minthogy a *G* pont középpontja az *ABCD* körnek, *BG* egyenlő *GD*-vel. A *BG* tehát nagyobb a *HD*-nél. Ennélfogva a *BH* még nagyobb a *HD*-nél. Viszont, minthogy a *H* pont középpontja az *EBFD* körnek, *BH* egyenlő *HD*-vel. Bebizonyítottuk azonban, hogy ez jóval nagyobb nála. De ez lehetetlen. Kör a kört tehát nem érinti belül egynél több pontban.

Azt mondom, kívül sem.

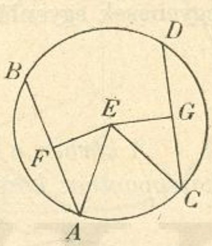
Mert, ha lehet, érintse az *ACK* kör az *ABCD* kört kívül egynél több, *A*, *C* pontokban. Húzzuk meg *AC*-t.

Minthogy az *ABCD*, *ACK* körök mindegyikének kerületében felvett tetszőleges két pont *A*, *C*, e pontokat összekötő egyenes a körök mindegyikén belül esik (III. 2.). Pedig az *ABCD*-n belül kellene esnie és az ACK-n kívül. De ez ellentmondás. Kör a kört tehát nem érinti kívül egynél több pontban. De bebizonyítottuk, hogy belül sem.

Kör a kört tehát nem érinti egynél több pontban, akár belül, akár kívül érinti. Ezt kellett bebizonyítanunk.

14.

A körben egyenlő egyenesek egyenlő távolságban vannak a középponttól és a középponttól egyenlő távolságban levő egyenesek egyenlők egymással.



Legyen a kör $ABCD$ és legyenek benne az AB, CD egyenlő egyenesek. Azt mondom, hogy AB, CD egyenlő távolságban vannak a középponttól.

Vegyük fel az $ABCD$ kör középpontját, legyen az E, húzzuk meg E-ből az AB-re, CD-re merőleges EF-et, EG-t és húzzuk meg AE-t, EC-t.

Minthogy a középponton átmenő EF egyenes a nem a középponton átmenő AB egyenest derékszögben metszi, azt meg is felezi (III. 3.). AF tehát egyenlő FB-vel. Az AB tehát az AF kétszerese. Ugyanebből az okból CD a CG kétszerese. És AB egyenlő CD-vel. Tehát AF egyenlő CG-vel. És minthogy AE egyenlő EC-vel, AE négyzete egyenlő EC négyzetével. De az AE négyzete egyenlő az AF és az EF négyzeteivel (I. 47.). Mert az F-nél fekvő szög derékszög. Az EC négyzete pedig egyenlő az EG és a GC négyzeteivel. Mert a G-nél fekvő szög derékszög. Tehát az AF és az FE négyzete egyenlő a CG és a GE négyzetével, de az AF négyzete egyenlő a CG négyzetével. Mert AF egyenlő CG-vel. Tehát a fenmaradó FE négyzete egyenlő a fenmaradó EG négyzetével. Tehát EF egyenlő EG-vel. Már pedig azt mondjuk, hogy a körben a középponttól egyenlő távolságban az egyenesek akkor vannak, ha a középponttól reájuk bocsátott merőlegesek egyenlők (III. IV. def.). Tehát az AB, CD egyenlő távolságban van a középponttól.

Legyenek azonban az AB, CD egyenesek egyenlő távolságban a középponttól, azaz legyen EF egyenlő EG-vel. Azt mondom, hogy AB egyenlő CD-vel.

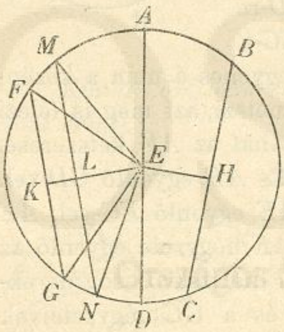
Mert ugyanezeket összehasonlítva, hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az AB az AF kétszerese, CD pedig a CG-é. És minthogy

AE egyenlő *CE*-vel, *AE* négyzete egyenlő *CE* négyzetével. De *AE* négyzete egyenlő az *EF* és az *FA* négyzeteivel, *CE* négyzete pedig az *EG* és a *GC* négyzeteivel. Tehát az *EF* és az *FA* négyzete egyenlő az *EG* és a *GC* négyzetével. Igy az *EF* négyzete egyenlő az *EG* négyzetével. Mert *EF* egyenlő *EG*-vel. Tehát a fenmaradó *AF* négyzete egyenlő a *CG* négyzetével. *AF* tehát egyenlő *CG*-vel. És az *AF* kétszerese az *AB*, a *CG* kétszerese pedig a *CD*. Tehát az *AB* egyenlő a *CD*-vel.

Ha tehát a körben egyenlő egyenesek egyenlő távolságban vannak a középponttól és a középponttól egyenlő távolságban levő egyenesek egyenlők egymással. Ezt kellett bebizonyitanunk.

15.

A körben a legnagyobb az átmérő, a többiek közül pedig a középponthoz közelebbi a távolabbinál nagyobb.



Legyen a kör *ABCD*, átmérője *AD*, középpontja pedig *E* és az *AD* átmérőhöz közelebbi legyen a *BC*, a távolabbi pedig *FG*. Azt mondom, hogy a legnagyobb az *AD*, *BC* pedig nagyobb *FG*-nél.

Húzzuk meg az *E* középpontból a *BC*-re, *FG*-re merőleges *EH*-t, *EK*-t. És minthogy a középponthoz közelebbi a *BC*, a távolabbi pedig az *FG*, az *EK* nagyobb az *EH*-nál (III. V. def.). Tegyük *EH*-val egyenlővé *EL*-et, az *L*-en át az *EK*-ra merőlegesen húzott *LM*-et húzzuk meg *N*-ig és húzzuk meg *ME*-t, *EN*-et, *FE*-t, *EG*-t.

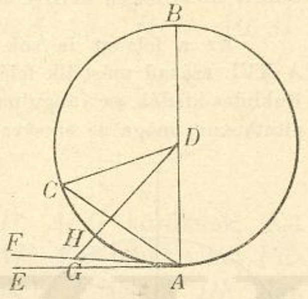
Minthogy *EH* egyenlő *EL*-lel, *BC* is egyenlő *MN*-nel (III. 14.). Viszont, minthogy *AE* egyenlő *EM*-mel, *ED* pedig *EN*-nel, *AD* egyenlő *ME*-vel meg *EN*-nel. De *ME* meg *EN* az *MN*-nél nagyobb (és *AD* is *MN*-nél nagyobb), *MN* pedig egyenlő *BC*-vel. *AD* tehát a *BC*-nél nagyobb. És minthogy a két *ME*, *EN* a két, *FE*-vel, *EG*-vel egyenlő, az *MEN* szög az *FEG* szögnél nagyobb, az *MN* alap is az *FG* alapnál nagyobb (I. 24.). De bebizonyitottuk, hogy *MN* *BC*-vel egyenlő (és *BC* az *FG*-nél nagyobb). A legnagyobb tehát az *AD* átmérő, *BC* pedig nagyobb *FG*-nél.

A körben tehát a legnagyobb az átmérő, a többiek közül pedig a középponthoz közelebbi a távolabbinál nagyobb. Ezt kellett bebizonyítanunk.

16.

A kör átmérőjére, annak végpontjában emelt merőleges a körön kívül esik, az egyenes és a kerület közötti helyre más egyenes nem helyezhető el és a félkör szöge minden egyenesvonalú hegyes szögnél nagyobb, a maradéka pedig kisebb.

Legyen a kör *ABC*, középpontja *D* és átmérője *AB*. Azt mondom, hogy az *A*-ban, az *AB*-re emelt merőleges a körön kívül esik.



Mert ne essék oda, hanem, ha lehet, essék belül *CA*-ba és húzzuk meg *DC*-t.

Minthogy *DA* egyenlő *DC*-vel, a *DAC* szög is egyenlő az *ACD* szöggel (I. 5.). A *DAC* szög pedig derékszög. Tehát az *ACD* szög is derékszög. Az *ACD* háromszögnek tehát a két *DAC*, *ACD* szöge két derékszöggel egyenlő. De ez lehetetlen (I. 17.). Igy tehát az *A* pontban a *BA*-ra emelt merőleges nem esik a körön belül. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a kerületen máshová sem esik. Tehát kívül.

Essék *AE*-be. Azt mondom, hogy az *AE* egyenes és a *CHA* kerület közötti helyre más egyenes nem helyezhető el.

Mert, ha lehet, helyezzük oda *FA*-t és húzzuk meg a *D* pontból az *FA*-ra merőleges *DG*-t. És minthogy az *AGD* szög derékszög, a *DAG* szög pedig kisebb a derékszögnél, az *AD* nagyobb a *DG*-nél (I. 19.). A *DA* azonban egyenlő a *DH*-val. Tehát a *DH* nagyobb a *DG*-nél, a kisebbik a nagyobbiknál. De ez lehetetlen. Ennélfogva az egyenes és a kerület közötti helyre más egyenes nem esik.

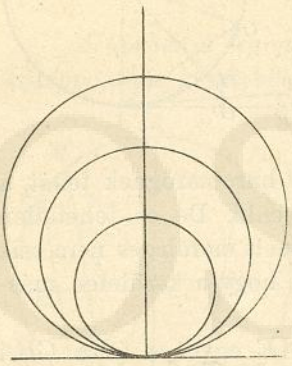
Azt mondom, hogy a félkörnek a *BA* egyenes és a *CHA* kerület (ív) által bezárt szöge minden egyenesvonalú hegyes szögnél kisebb.

Mert ha van valamely egyenesvonalú szög, mely a *BA* egyenes és a *CHA* kerület (ív) által bezárt szögnél nagyobb vagy pedig olyan, mely a *CHA* kerület és *AE* egyenes által bezárt szögnél kisebb, a *CHA* kerület (ív) és az *AE* egyenes közötti helyre oly egyenes helyezhető el, mely a *BA* egyenes és a *CHA* kerület (ív) által bezárt szögnél nagyobb, a *CHA* kerület (ív) és az *AE* egyenes által bezárt szögnél pedig egyenesek által bezárt, kisebb szöget alkot. Ilyen pedig nem helyezhető el. Tehát nincs oly, egyenesek által bezárt hegyes szög, mely a *BA* egyenes a *CHA* kerület (ív) által bezárt szögnél nagyobb vagy olyan, mely a *CHA* kerület (ív) és az *AE* egyenes által bezárt szögnél kisebb volna.

Porizma (következmény).

Ebből kitünik, hogy a kör átmérőjére, annak végpontjában emelt merőleges érinti a kört. Ezt kellett bebizonyítanunk.

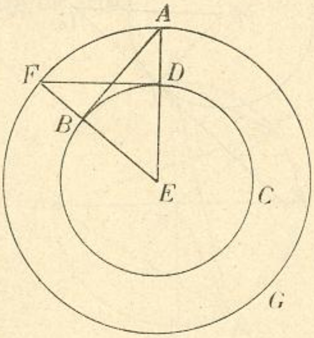
Ez a feladat is sok kritikának és vitatkozásnak lett a kútforrása. A XVI. század második felében kezdtek már nagynevű mathematikusok, főleg Euklides-kiadók az «angulus contingentiæ» mibenlétéről és tulajdonságairól vitatkozni; maga az elnevezés a XIII. századból való (Jordanus, dominikánus rendi generalistól). Értették pedig alatta azt a szöget, melyet egy görbe vonal és annak érintője alkot, amilyenről Euklides azt mondja, hogy az «minden egyenesvonalú hegyes szögnél kisebb». Peletarius már 1557-ben mondta ki egyebek között, hogy *a kontingencia szögének nagysága nulla, mert az érintő összeolvad a körrel.* Vele szemben Clavius azt bizonyította, hogy a kontingencia szögének nagysága nem nulla, mert különböző körök segítségével tetszőlegesen kisebbíthető vagy nagyobbítható, miképen ezt a mellékelt ábra mutatja. Sokaknak (mint Vieta, Galilei, Wallis, Leotaud) hozzászólása után végre Newton adta a megoldást, hogy a Clavius-féle rajzban az érintő pontnál a változó elem a *görbület* (melyet mathematikailag a sugár reciprókja által fejezett ki) és hogy a görbület nagyságától függ a görbe és az érintő eltávolodásának nagyobb vagy kisebb gyorsasága.



A 16. feladat nehézsége és nehézkessége már az *Elemek* I. könyvének VIII. definiciójában gyökerezik, mely szerint a szög két vonalnak (tehát görbének is) a hajlása; az egyenesvonalú szöget Euklides külön definiálja a IX. definicióban. A III. könyv VII. definiciójában ismét érinti a görbevonalú szöget, de méréséről ekkor sem tesz említést. A 16. feladatban azonban előáll e szög mérésének a szüksége. Ha Euklides vagy elejti a görbevonalú szöget vagy pedig behatóan megadja a mértékét az érintő helyes definiciójával kapcsolatban, sokkal hamarabb mondhatta volna ki a porizmát a 16. feladat végén, így azonban kénytelen volt a dolgot hosszasan bizonyítani és úgy kifejezni, hogy az a szög «minden egyenesvonalú hegyes szögnél kisebb». E kifejezés azonban mathematikailag helyes; Euklides finom mathematikai érzéke a maga teremtette nehézségek közepette is a helyes úton vezette őt. Eljárása különben is egy egészen rendszeres mathematikai módszernek, a *határátmenet*nek egyik esete.

17.

Adott pontból húzzunk adott körhöz érintő egyenes vonalat.



Legyen az adott pont A, az adott kör pedig BCD. Ebből az A pontból húzzunk a BCD körhöz érintő egyenes vonalat.

Vegyük fel a kör középpontját E-ben, húzzuk meg AE-t, az E középpont körül rajzoljuk meg az EA sugárral az AFG kört, a D-ben emeljük az AE-re merőleges DF-et és húzzuk meg EF-et, AB-t. Azt mondom, hogy az A pontból a BCD körhöz húzott érintő az AB.

Minthogy az E középpontja a BCD, AFG köröknek, EA egyenlő EF-fel, ED pedig EB-vel. A két AE, EB tehát a két FE-vel, ED-vel egyenlő. És közös szöget fognak be E-nél. A DF alap tehát egyenlő az AB alappal, a DEF háromszög egyenlő az EBA háromszöggel és a fenmaradó szög is egyenlő a fenmaradó szöggel (I. 4.). Az EDF szög tehát egyenlő az EBA szöggel. Az EDF szög pedig derékszög. Tehát az EBA szög is derékszög. És EB a sugár. A kör átmérőjére, annak végpontjában emelt merőleges pedig a kört érinti (III. 16. fel. porizmája). Az AB tehát érinti a BCD kört.

Tehát az adott A pontból meghúztuk az adott BCD körhöz az AB érintő egyenes vonalat. Ezt kellett elvégeznünk.

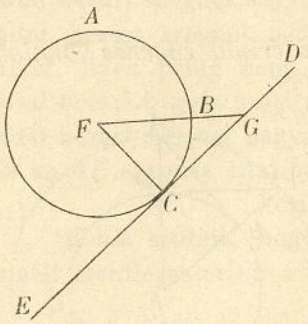
18.

Ha a kört egy egyenes érinti, a középpontból pedig az érintési ponthoz egyenest húzunk, a meghúzott (egyenes) merőleges az érintőre.

Az ABC kört érintse a DE egyenes C pontban, vegyük fel az ABC kör középpontját F-ben és F-től C-ig húzzuk meg az FC-t. Azt mondom, hogy FC merőleges DE-re.

Mert ha nem az, húzzuk meg F-ből a DE-re merőleges FG-t.

Minthogy az FGC szög derékszög, az FCG szög hegyes szög (I. 17.). A nagyobb szöget pedig nagyobb oldal fogja át (I. 19.). Az FC tehát nagyobb az FG-nél. Az FC pedig egyenlő az FB-vel. Az

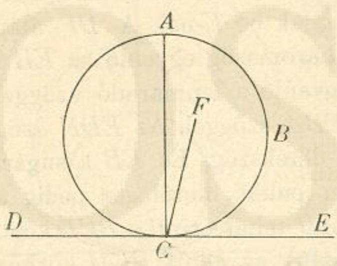


FB tehát nagyobb az *FG*-nél, a kisebbik a nagyobbiknál. De ez lehetetlen. Tehát az *FG* nem merőleges a *DE*-re. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy más sem az az *FC*-n kívül. Tehát az *FC* merőleges a *DE*-re.

Ha tehát a kört egy egyenes érinti, a középpontból pedig az érintési ponthoz egyenest húzunk, a meghúzott (egyenes) merőleges az érintőre. Ezt kellett bebizonyítanunk.

19.

Ha a kört egy egyenes érinti, az érintési pontban pedig az érintőre merőleges egyenes vonalat húzunk, a kör középpontja benne fekszik.



Az *ABC* kört érintse a *DE* egyenes *C* pontban és húzzuk meg *C*-ben a *DE*-re merőleges *CA*-t. Azt mondom, hogy az *AC*-ben fekszik a kör középpontja.

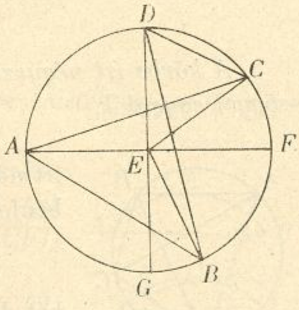
Mert ne legyen benne, hanem, ha lehet, legyen *F*-ben és húzzuk meg *CF*-et.

Minthogy az *ABC* kört érinti a *DE* egyenes, a középpontból pedig az érintési ponthoz az *FC* egyenest húztuk, *FC* merőleges *DE*-re (III. 18.). Az *FCE* szög tehát derékszög. De az *ACE* szög is derékszög. Az *FCE* szög tehát egyenlő az *ACE* szöggel, a kisebbik a nagyobbikkal. De ez lehetetlen. Igy tehát az *F* nem középpontja az *ABC* körnek. Hasonlóképen bebizonyitjuk, hogy máshol sem lehet *AC*-n kívül.

Ha tehát a kört egy egyenes érinti, az érintési pontban pedig az érintőre merőleges egyenes vonalat húzunk, a kör középpontja benne fekszik. Ezt kellett bebizonyítanunk.

20.

A körben a középpontnál fekvő szög kétszerese a kerületi szögnek, ha a szögeknek ugyanaz az alapjuk van.



Legyen a kör ABC, a középpontjánál fekvő szög BEC, a kerületi szög BAC, ugyanannak a kerületnek (ívnek) az alapja pedig BC. Azt mondom, hogy a BEC szög a BAC kétszerese.

Húzzuk meg az AE-t F-ig.

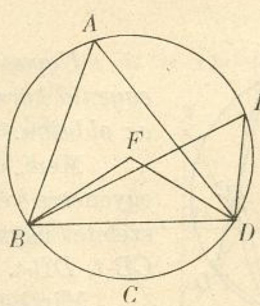
Minthogy EA egyenlő EB-vel, az EAB szög is egyenlő az EBA szöggel. Tehát az EAB, EBA kétszerese az EAB szögnek. A BEF szög pedig akkora, mint EAB, EBA (I. 32.). Igy tehát a BEF szög kétszerese az EAB szögnek. Ugyanebből az okból az FEC szög az EAC szög kétszerese. Tehát az egész BEC szög az egész BAC szög kétszerese.

Viszont fordítsuk el és legyen egy másik szög BDC; húzzuk meg DE-t és hosszabbítsuk meg G-ig. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a GEC szög az EDC szögnek, ennélfogva a GEB kétszerese az EDB-nek. A BEC maradékszög tehát kétszerese a BDC szögnek.

A körben tehát a középpontnál fekvő szög kétszerese a kerületi szögnek, ha (a szögeknek) ugyanaz az alapjuk van. Ezt kellett bebizonyítanunk.

21.

A körben ugyanannak a körszeletnek szögei egyenlők egymással.



Legyen a kör $ABCD$ és ugyanannak a $BAED$ körszeletnek szögei legyenek BAD, BED. Azt mondom, hogy a BAD, BED szögek egyenlők egymással.

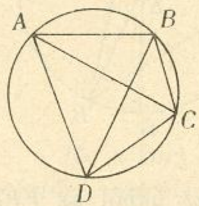
Vegyük fel az $ABCD$ kör középpontját, legyen ez F és húzzuk meg BF-et, FD-t.

Minthogy a BFD szög a középpontnál fekszik, a BAD pedig a kerületen és ezeknek ugyanaz a BCD körszeleti alapjuk van, ennélfogva a BFD szög kétszerese a BAD-nek. Ugyan ebből az okból a *BFD* szög a *BED*-nek is kétszerese. Tehát a *BAD* szög egyenlő a *BED*-vel.

A körben tehát ugyanannak a körszeletnek szögei egyenlők egymással. Ezt kellett bebizonyítanunk.

22.

A körbe írt négyszögben a szembenfekvő szögek két derékszöggel egyenlők.



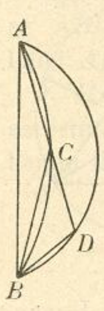
Legyen a kör *ABCD* és legyen a beléje írt négyszög *ABCD*. Azt mondom, hogy a szembenfekvő szögek két derékszöggel egyenlők.

Húzzuk meg *AC*-t, *BD*-t.

Minthogy minden háromszög három szöge két derékszöggel egyenlő (I. 32.), az *ABC* háromszögnek három szöge: *CAB*, *ABC*, *BCA* két derékszöggel egyenlő. A *CAB* szög pedig egyenlő a *BDC* szöggel. Mert ugyanazon a *BADC* körszeleten vannak (III. 21.). Az *ACB* szög pedig egyenlő az *ADB* szöggel. Mert ugyanazon az *ADCB* körszeleten vannak. Az egész *ADC* tehát akkora, mint *BAC*, *ACB*. Adjuk hozzá a közös *ABC* szöget. Tehát az *ABC*, *BAC*, *ACB* akkora, mint az *ABC*, *ADC*. De *ABC*, *BAC*, *ACB* két derékszöggel egyenlő. Igy tehát *ABC*, *ADC* is két derékszöggel egyenlő. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a *BAD*, *DCB* szögek is két derékszöggel egyenlők.

A körbe írt négyszögben tehát a szembenfekvő szögek két derékszöggel egyenlők. Ezt kellett bebizonyítanunk.

23.



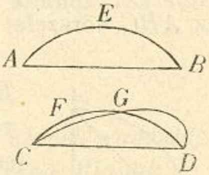
Ugyanarra az egyenesre két hasonló és nem egyenlő körszeletet nem lehet szerkeszteni ugyanazon az oldalon.

Mert, ha lehet, szerkesszünk ugyanarra az *AB* egyenesre két hasonló és nem egyenlő *ACB*, *ADB* körszeletet ugyanazon az oldalon, húzzuk meg *ACD*-t és *CB*-t, *DB*-t.

Minthogy az *ACB* körszelet hasonló az *ADB* körszelethez, hasonló körszeletek pedig azok, melyek egyenlő szögeket foglalnak magukban (III. XI. def.), tehát az ACB szög egyenlő az ADB szöggel, a külső a belsővel. De ez lehetetlen (I. 16.). Tehát ugyanarra az egyenesre két hasonló és nem egyenlő körszeletet nem lehet szerkeszteni ugyanazon az oldalon. Ezt kellett bebizonyítanunk.

24.

Egyenlő egyeneseken álló hasonló körszeletek egyenlők egymással.



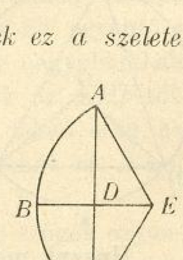
Legyenek az egyenlő AB, CD egyenesekre állított hasonló körszeletek AEB, CFD. Azt mondom, hogy az AEB körszelet egyenlő a CFD körszelettel.

Mert helyezzük az AEB körszeletet a CFD körszeletre úgy, hogy az A pont a C-re, az AB egyenes a CD-re, a B pont a D pontra essék és AB egyenlő legyen CD-vel. Ha pedig az AB-t a CD-re helyezzük, az AEB körszelet is rá esik a CFD körszeletre. Mert ha az AB egyenes ráesik a CD-re, az AEB körszelet pedig nem esik a CFD-re, ez vagy azon belül vagy azon kívül esik vagy átmetszi azt CGD-ben és ekkor kör a kört kettőnél több pontban metszi. De ez lehetetlen (III. 10.) Igy tehát az AB nem helyezhető a CD-re úgy, hogy az AEB körszelet a CFD körszeletre rá ne essék. Ráesik tehát és egyenlő vele (VII. axioma).

Tehát egyenlő egyeneseken álló hasonló körszeletek egyenlők egymással. Ezt kellett bebizonyítanunk.

25.

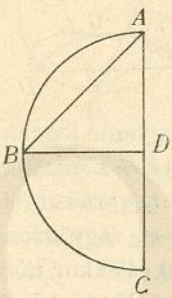
Adott körszeletet egészítsünk ki körré, melynek ez a szelete.



Legyen az adott körszelet ABC. Ezt az ABC körszeletet egészítsük ki körré, melynek ez a szelete.

Felezzük meg az AC-t D-ben, emeljük a D pontban az AC-re merőleges DB-t és húzzuk meg AB-t. Az ABD szög tehát a BAD szögnél nagyobb, vagy vele egyenlő, vagy nála kisebb.

Legyen először nagyobb; szerkesszük meg a BA egyenesre annak A pontjában az ABD szöggel egyenlő BAE szöget, húzzuk meg DB-t E-ig és húzzuk meg EC-t. Minthogy az ABE szög egyenlő a BAE-vel, az EB egyenes is egyenlő az EA egyenessel (I. 6.). És minthogy AD egyenlő DC-vel, közös pedig a DE, a két AD, DE a két CD-vel, DE-vel egyenlő külön-külön. És az ADE szög is egyenlő a CDE szöggel. Mert mindegyikük derékszög. Az AE alap tehát egyenlő a CE alappal (I. 4.). De bebizonyítottuk, hogy AE egyenlő BE-vel. Igy tehát BE is egyenlő CE-vel. Tehát a három AE, EB, EC egyenlő egymással. Tehát az E középpont köré az AE, EB, EC sugarak egyikével rajzolt kör átmegy a többi ponton is és ki is egészült. Az adott körszeletet tehát kiegészítettük körré. És kitünik, hogy, ha az ABC körszelet kisebb a félkörnél, az E középpont kívüle esik.



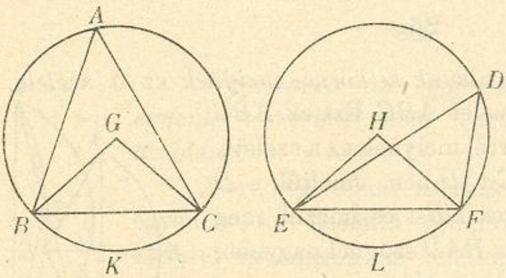
Hasonlóképen, ha az ABD szög egyenlő a BAD-vel, az AD egyenlő a BD, DC mindegyikével és így a három DA, DB, DC egyenlő egymással, a D középpontja a kiegészített körnek és kitünik, hogy az ABC félkör.

Ha pedig az ABD szög kisebb a BAD-nél és megszerkesztjük a BA egyenesre annak A pontjában az ABD-vel egyenlő szöget, az ABC körszeleten kívül esik a középpont DB-be és kitünik, hogy az ABC körszelet nagyobb a félkörnél.

Adott körszeletet tehát kiegészítettünk körré. Ezt kellett elvégeznünk.

26.

Egyenlő körökben az egyenlő szögek egyenlő íveken állanak, akár a középpontoknál, akár a kerületeken állanak.



Legyenek az egyenlő körök ABC, DEF és bennük az egyenlő szögek a középpontoknál BGC, EHF, a kerületeken pedig BAC, EDF. Azt mondom, hogy a BKC is egyenlő az ELF ívvel.

Húzzuk meg BC-t, EF-et.

Minthogy egyenlők az ABC, DEF körök, egyenlők ezek sugarai is. A két BG, GC tehát egyenlő a két EH-val, HF-fel. És a

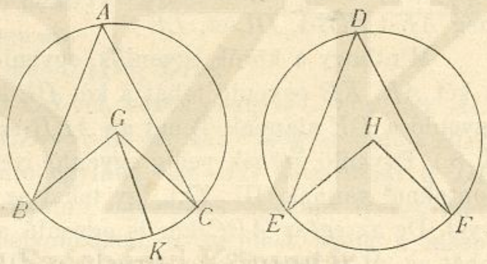
G-nél fekvő szög egyenlő a H-nál fekvő szöggel. A BC alap tehát egyenlő az EF alappal (I. 4.) És minthogy az A-nál fekvő szög egyenlő a D-nél fekvő szöggel, a BAC körszelet hasonló az EDF körszelettel (III. XI. def.). És az egyenlő (BC, EF) egyeneseken állanak. Egyenlő egyeneseken álló hasonló körszeletek pedig egyenlők egymással (III. 24.). A BAC körszelet tehát egyenlő az EDF körszelettel. De az egész ABC kör is egyenlő az egész DEF körrel. A BKC maradék tehát egyenlő az ELF maradékívvel.

Egyenlő körökben tehát az egyenlő szögek egyenlő íveken állanak akár a középpontoknál, akár a kerületeken állanak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

27.

Egyenlő körökben az egyenlő íveken álló szögek egyenlők egymással, akár a középpontoknál, akár a kerületeken állanak.

Mert álljanak az egyenlő ABC, DEF körökben az egyenlő BC, EF íveken a G, H középpontoknál a BGC, EHF szögek, a kerületeken pedig a BAC, EDF szögek. Azt mondom, hogy a BGC szög egyenlő az EHF-fel, a BAC pedig az EDF-fel.

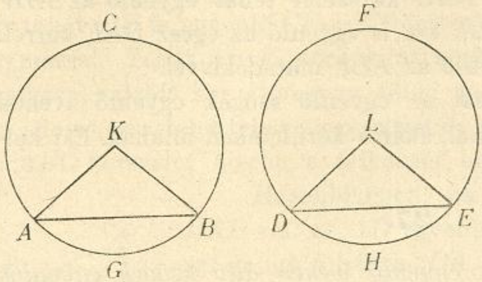


Mert ha a BGC szög nem egyenlő az EHF-fel, egyikük nagyobb. Legyen a nagyobbik a BGC, szerkesszük meg a BG-re annak G pontjában az EHF szöggel egyenlő BGK szöget. Egyenlő szögek pedig egyenlő íveken állanak, ha a középpontoknál vannak (III. 26.). Tehát a BK ív egyenlő az EF ívvel. De EF egyenlő a BC-vel. A BK tehát egyenlő a BC-vel, a kisebbik a nagyobbikkal. De ez lehetetlen. Tehát a BGC szög nem különbözik az EHF-től. Tehát egyenlő vele. És a BGC szög fele az A-nál fekvő szög, az EHF szög fele pedig a D-nél fekvő szög (III. 20.). Tehát az A-nál fekvő szög egyenlő a D-nél fekvő szöggel.

Egyenlő körökben tehát az egyenlő íveken álló szögek egyenlők egymással, akár a középpontoknál, akár a kerületeken állanak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

28.

Egyenlő körökben az egyenlő egyenesek egyenlő íveket metszenek ki, a nagyobbat a nagyobbikkal, a kisebbet pedig a kisebbikkel.



Legyenek az egyenlő körök ABC, DEF és bennük az egyenlő egyenesek AB, DE, melyek a nagyobb ACB, DFE és a kisebb AGB, DHE íveket kimetszik. Azt mondom, hogy a nagyobb ACB ív egyenlő a nagyobb DFE ívvel, a kisebb AGB ív pedig a DHE-vel.

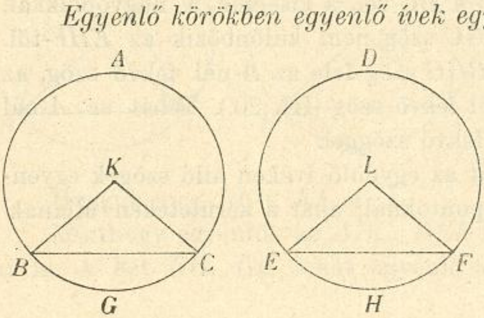
Vegyük fel a körök középpontjait K-ban, L-ben és húzzuk meg AK-t, KB-t, DL-et, LE-t.

Minthogy a körök egyenlők, egyenlők a sugaraik is (III. I. def.). A két AK, KB egyenlő tehát a két DL-lel, LE-vel. És az AB alap egyenlő a DE alappal. Tehát az AKB szög egyenlő a DLE szöggel (I. 8.). Egyenlő szögek pedig egyenlő íveken állanak, ha a középpontoknál vannak (III. 27.). Igy tehát az AGB ív egyenlő a DHE ívvel. De az egész ABC kör is egyenlő az egész DEF körrel. Igy tehát az ACB maradék ív egyenlő a DFE maradék ívvel.

Egyenlő körökben tehát az egyenlő egyenesek egyenlő íveket metszenek ki, a nagyobbat a nagyobbikkal, a kisebbet pedig a kisebbikkel. Ezt kellett bebizonyítanunk.

29.

Egyenlő körökben egyenlő ívek egyenlő egyeneseket fognak át.



Legyenek az egyenlő körök ABC, DEF, bennük az egyenlő ívek messék ki BGC-t, EHF-et és húzzuk meg a BC, EF egyeneseket. Azt mondom, hogy BC egyenlő EF-fel.

Vegyük fel a körök középpontjait, legyenek ezek K, L és húzzuk meg BK-t, KC-t, EL-et, LF-et.

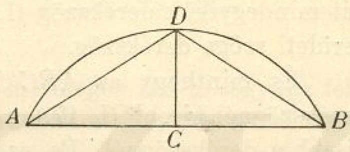
És minthogy a BGC ív egyenlő az EHF ívvel, a BKC szög is egyenlő az ELF szöggel (III. 27.). És minthogy egyenlők az ABC, DEF körök, egyenlők sugaraik is (III. I. def.). A két BK, KC tehát egyenlő a két EL-lel, LF-fel. És ezek egyenlő szögeket fognak be (I. 4.). A BC alap tehát egyenlő az EF alappal.

Egyenlő körökben tehát egyenlő ívek egyenlő egyeneseket fognak át. Ezt kellett bebizonyítanunk.

30.

Felezzük meg az adott körívet.

Legyen az adott körív ADB. Ezt az ADB ívet felezzük meg.



Húzzuk meg AB-t, felezzük ezt meg C-ben (I. 10.), a C pontban emeljük az AB egyenesre merőleges CD-t és húzzuk meg AD-t, DB-t.

Minthogy AC egyenlő CB-vel, közös pedig a CD, a két AC, CD egyenlő a két BC-vel, CD-vel. És az ACD szög egyenlő a BCD szöggel. Mert derékszög mindegyikük. Az AD alap tehát a DB alappal egyenlő (I. 4.). De egyenlő egyenesek egyenlő íveket metszenek ki, a nagyobbat a nagyobbikkal, a kisebbet pedig a kisebbikkel (III. 28.). És az AD, DB ívek mindegyike kisebb a félkörnél. Tehát az AD ív egyenlő a DB ívvel.

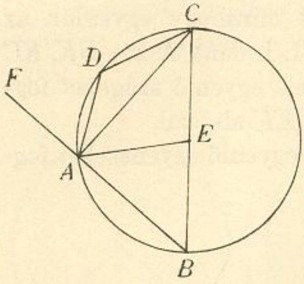
Az adott körívet tehát megfeleztük D pontban. Ezt kellett elvégeznünk.

31.

A körben a félkör kerületi szöge derékszög, a (félkörnél) nagyobb ívben fekvő kerületi szög kisebb a derékszögnél, a félkörnél kisebb ívben fekvő kerületi szög pedig nagyobb a derékszögnél. Továbbá a (félkörnél) nagyobb ív körszeleti szöge nagyobb a derékszögnél, a (félkörnél) kisebb ív körszeleti szöge pedig kisebb a derékszögnél.

Legyen a kör $ABCD$, átmérője BC, középpontja pedig E és húzzuk meg BA-t, AC-t, AD-t, DC-t. Azt mondom, hogy a BAC félkör BAC kerületi szöge derékszög, a félkörnél nagyobb ABC

körívben fekvő *ABC* kerületi szög kisebb a derékszögnél, a félkörnél kisebb *ADC* körívben fekvő *ADC* kerületi szög pedig nagyobb a derékszögnél.



Húzzuk meg *AE*-t és hosszabbítsuk meg *BA*-t *F*-ig.

Minthogy *BE* egyenlő *EA*-val, az *ABE* szög egyenlő a *BAE*-vel (I. 5.). Viszont, minthogy *CE* egyenlő *EA*-val, az *ACE* szög egyenlő a *CAE*-vel. Tehát az egész *BAC* szög egyenlő a két *ABC*-vel, *ACB*-vel. De az *ABC* háromszög külső *FAC* szöge is egyenlő a két *ABC*-vel, *ACB*-vel (I. 32.). A *BAC* szög tehát egyenlő az *FAC*-vel. Tehát mindegyikük derékszög (I. X. def.). Tehát a *BAC* félkör *BAC* kerületi szöge derékszög.

És minthogy az *ABC* háromszög két *ABC*, *BAC* szöge két derékszögnél kisebb (I. 17.), a *BAC* pedig derékszög, az *ABC* szög kisebb a derékszögnél. És ez a félkörnél nagyobb *ABC* körívben fekvő kerületi szög.

És minthogy *ABCD* körbe írt négyszög, a körbe írt négyszögben pedig a szembenfekvő szögek két derékszöggel egyenlők (tehát az *ABC*, *ADC* szögek egyenlők két derékszöggel) (III. 22.) és az *ABC* szög kisebb a derékszögnél, az *ADC* maradékszög nagyobb a derékszögnél. És ez a félkörnél kisebb *ADC* körívben fekvő kerületi szög.

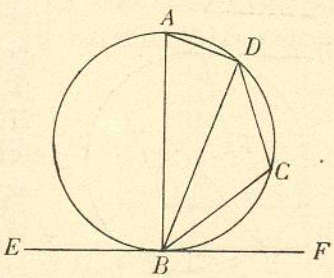
Azt mondom, hogy a nagyobb *ABC* körívből és az *AC* egyenesből alkotott szög nagyobb a derékszögnél, a kisebb *ADC* körívből és az *AC* egyenesből alkotott szög pedig kisebb a derékszögnél. És ez rögtön kitűnik. Minthogy a *BA*, *AC* egyenesekből alkotott szög derékszög, az *ABC* körívből és az *AC* egyenesből alkotott szög nagyobb a derékszögnél. Viszont, minthogy az *AC*, *AF* egyenesekből alkotott szög derékszög, a *CA* egyenesből és az *ADC* körívből alkotott szög kisebb a derékszögnél.

A körben tehát a félkör kerületi szöge derékszög, a (félkörnél) nagyobb ívben fekvő kerületi szög kisebb a derékszögnél, a (félkörnél) kisebb ívben fekvő kerületi szög nagyobb a derékszögnél, továbbá a (félkörnél) nagyobb ív körszeleti szöge nagyobb a derékszögnél, a (félkörnél) kisebb ív körszeleti szöge pedig kisebb a derékszögnél. Ezt kellett bebizonyítanunk.

32.

Ha a kört egy egyenes érinti, az érintési pontból pedig a körben egy a kört metsző egyenest húzunk, a szögek, melyeket ez az érintővel alkot, egyenlők a szembenfekvő kerületi szögekkel.

Érintse az $ABCD$ kört az EF egyenes B pontban és a B pontból húzzuk meg az $ABCD$ kört metsző BD egyenest. Azt mondom, hogy a szögek, melyeket a BD az EF érintővel alkot, egyenlők a szembenfekvő kerületi szögekkel, vagyis hogy az FBD szög egyenlő a BAD kerületi szöggel, az EBD szög pedig egyenlő a DCB kerületi szöggel.



Húzzuk meg a B-n át az EF-re merőleges BA-t, vegyünk fel a BD ívben tetszőleges C pontot és húzzuk meg AD-t, DC-t, CB-t.

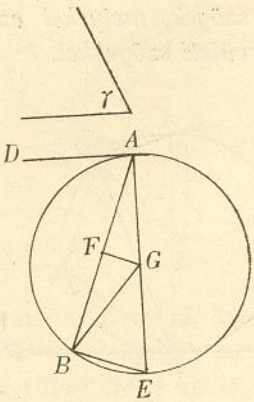
Minthogy az $ABCD$ kört az EF egyenes B-ben érinti és az érintési pontban az érintőre húzott merőleges BA, a BA-ban fekszik a kör középpontja (III. 19.). BA tehát az $ABCD$ kör átmérője. Az ADB szög tehát, mely a félkör kerületi szöge, derékszög (III. 31.). A BAD, ABD maradékszögek tehát egy derékszöggel egyenlők (I. 32.). Az ABF szög pedig derékszög. Igy az ABF szög egyenlő a BAD, ABD szögekkel. Vonjuk le a közös ABD-t. A DBF maradékszög tehát egyenlő a szembenfekvő BAD kerületi szöggel. És minthogy $ABCD$ körbe írt négyszög, szembenfekvő szögei két derékszöggel egyenlők (III. 22.). A DBF, DBE szögek pedig szintén két derékszöggel egyenlők. Igy tehát DBF, DBE annyi, mint BAD, BCD, amiből bebizonyul, hogy BAD egyenlő ABF-fel. A másik DBE szög tehát egyenlő a szembenfekvő DCB körívben fekvő DCB kerületi szöggel.

Ha tehát a kört egy egyenes érinti, az érintési pontból pedig a körben egy a kört metsző egyenest húzunk, a szögek, melyeket ez az érintővel alkot, egyenlők a szembenfekvő kerületi szögekkel.

33.

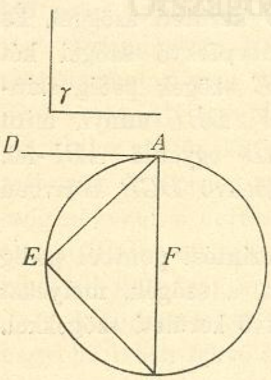
Adott egyenesre rajzoljunk körszeletet, mely adott egyenesvonalú szöggel egyenlő szöget foglal magában.

Legyen az adott egyenes AB, az adott egyenes vonalú szög pedig γ. Erre az adott AB egyenesre rajzoljunk körszeletet, mely a γ szöggel egyenlő szöget foglal magában.



A γ (szög) vagy hegyes szög, vagy derékszög, vagy tompaszög. Legyen először hegyes szög és mint az első rajzban, szerkesszük meg az AB egyenesre annak B pontjánál a γ szöggel egyenlő BAD-t (I. 23.). Igy tehát a BAD szög hegyes szög. Húzzuk meg a DA-ra merőleges AE-t, felezzük meg az AB-t F-ben, húzzuk meg az F ponton át az AB-re merőleges FG-t és húzzuk meg GB-t.

Minthogy AF egyenlő FB-vel, közös pedig az FG, a két AF, FG egyenlő a két BF-fel, FG-vel. És az AFG (szög) egyenlő a BFG-vel. Az AG alap tehát egyenlő a BG alappal (I. 4.). Tehát a G középpont köré, GA sugárral rajzolt kör átmegy a B-n is. Rajzoljuk meg és legyen ez ABE; húzzuk meg EB-t. Minthogy az AE átmérő A végpontjában az AE-re emelt merőleges az AD, az AD érinti az ABE kört (III. 16. feladat porizmája). Minthogy pedig az ABE kört érinti az AD egyenes és az A érintési pontból az ABE körben az AB egyenest húztuk, a DAB szög egyenlő a szembenfekvő AEB kerületi szöggel (III. 32.). De a DAB szög a γ szöggel egyenlő. És így a γ szöggel egyenlő az AEB szög.



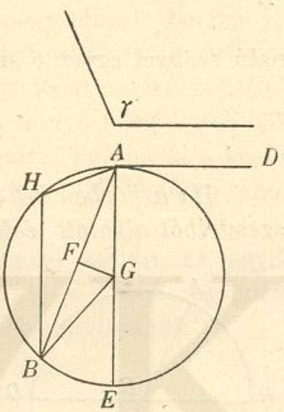
Tehát az adott AB egyenesre az AEB körszeletet rajzoltuk, mely az adott γ szöggel egyenlő AEB szöget foglalja magában.

De legyen derékszög a γ szög. És viszont feltesszük, hogy az AB-re körszeletet rajzolunk, mely a γ derékszöggel egyenlő szöget magában foglal. Szerkesszük meg a γ derékszöggel egyenlő BAD szöget, mint a második rajzban, felezzük meg az AB-t F-ben és F pont köré az FA, FB valamelyikével, mint sugárral rajzoljuk meg az AEB kört.

Az AD egyenes tehát érinti az ABE kört, mert az A-nál fekvő szög derékszög. És a BAD szög egyenlő az AEB kerületi szöggel. Mert ez derékszög, mint a félkör kerületi szöge (III. 31.). De a BAD szög egyenlő a γ szöggel. Igy tehát az AEB szög egyenlő a γ szöggel.

Tehát viszont megrajzoltuk az AB-re az AEB körszeletet, mely a γ-val egyenlő szöget foglalja magában.

Most pedig legyen a γ tompaszög. És szerkesszük meg az AB egyenesre ennek A pontjánál a γ-val egyenlő BAD szöget, mint a harmadik rajzban, emeljük az AD-re merőleges AE-t, felezzük meg viszont AB-t F-ben, emeljük az AB-re merőleges FG-t és húzzuk meg GB-t.



Minthogy viszont AF egyenlő FB-vel és közös az FG, a két AF, FG egyenlő a két BF-fel, FG-vel. És az AFG szög egyenlő a BFG szöggel. Az AG alap tehát egyenlő a BG alappal (I. 4.). Tehát a G középpont köré, GA sugárral rajzolt kör átmegy a B-n is. Essék AEB-be. És minthogy az AE átmérő végpontjában emelt merőleges az AD, az AD érinti az ABE kört (III. 16. feladat porizmája). És az A érintési pontból húztuk meg az AB-t. Tehát a BAD szög egyenlő a szembenfekvő AHB kerületi szöggel (III. 32.). De a BAD szög a γ szöggel egyenlő. És így AHB kerületi szög is egyenlő a γ szöggel.

Tehát az adott AB egyenesre az AHB körszeletet rajzoltuk, mely a γ-val egyenlő szöget foglalja magában. Ezt kellett elvégeznünk.

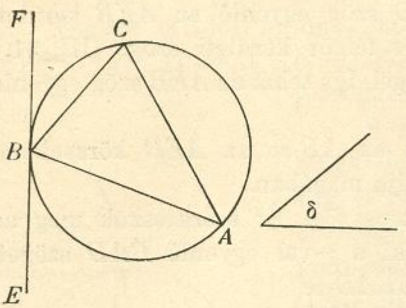
34.

Adott körből vágjunk ki oly körszeletet, mely adott egyenesvonalú szöggel egyenlő szöget foglal magában.

Legyen az adott kör ABC, az adott egyenesvonalú szög pedig δ. Ebből az ABC körből vágjunk ki oly körszeletet, mely az adott δ egyenesvonalú szöggel egyenlő szöget foglal magában.

Húzzuk meg az ABC kört B pontban érintő EF-et és szerkesszük meg az FB egyenesre annak B pontjánál a δ szöggel egyenlő FBC szöget (I. 23.).

Minthogy az ABC kört érinti az EF egyenes és a B érintési

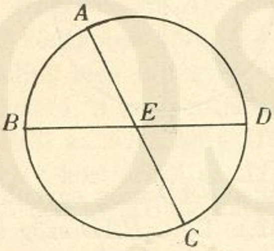


ponton át húztuk a BC-t, az FBC szög egyenlő a szembenfekvő BAC kerületi szöggel (III. 32.). De az FBC szög egyenlő a δ-val. És így a BAC kerületi szög is egyenlő a δ szöggel.

Az adott ABC körből tehát kivágtuk a BAC körszeletet, mely az adott δ egyenesvonalú szöggel egyenlő szöget foglal magában. Ezt kellett elvégeznünk.

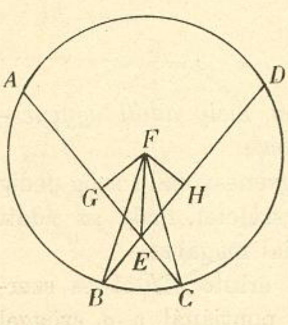
35.

Ha a körben két egyenes egymást metszi, az egyik (egyenes) szeleteiből alkotott téglalap egyenlő a másik (egyenes) szeleteiből alkotott téglalappal.



Mert messe egymást az $ABCD$ körben a két AC, BD egyenes E pontban. Azt mondom, hogy az AE-ből alkotott téglalap egyenlő a DE-ből, EB-ből alkotott téglalappal.

Ha AC, BD a középponton megy át, úgy hogy az E az $ABCD$ kör középpontja, nyilvánvaló, hogy AE, EC, DE, EB egyenlők (egymással) és így az AE-ből, EC-ből alkotott téglalap egyenlő a DE-ből, EB-ből alkotott téglalappal.



De ne menjenek az AC, DB egyenesek a középponton át; vegyük fel az $ABCD$ középpontját és legyen ez F, bocsássuk az F-ből az AC, BD egyenesekre merőleges FG-t, FH-t és húzzuk meg FB-t, FC-t, FE-t.

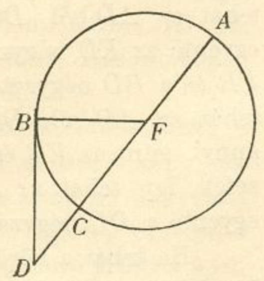
Minthogy a középponton átmenő GF egyenes a nem a középponton átmenő AC egyenest derékszögben metszi, ezt meg is felezi (III. 3.). AG tehát egyenlő GC-vel. Minthogy az AC egyenest megfelezi a G, nem egyenlő részekre pedig osztja az E, az AE-ből, EC-ből alkotott téglalap meg az EG

négyzete egyenlő a GC négyzetével (II. 5.). Adjuk hozzá a (közös) GF négyzetét. Tehát az AE-ből, EC-ből alkotott téglalap meg a GE és a GF négyzete annyi mint a CG és a GF négyzete. De az EG és a GF négyzete egyenlő az FE négyzetével, a CG és a GF négyzete pedig egyenlő az FC négyzetével (I. 47.). Tehát az AE-ből, EC-ből alkotott téglalap meg az FE négyzete egyenlő az FC négyzetével. Az FC pedig egyenlő az FB-vel. Igy tehát az AE-ből, EC-ből alkotott téglalap meg az EF négyzete egyenlő az FB négyzetével. Ugyanebből az okból a DE-ből, EB-ből alkotott téglalap meg az FE négyzete egyenlő az FB négyzetével. Bebizonyítottuk pedig, hogy az AE-ből, EC-ből alkotott téglalap meg az FE négyzete egyenlő az FB négyzetével. Igy tehát az AE-ből, EC-ből alkotott téglalap meg az FE négyzete annyi mint a DE-ből, EB-ből alkotott téglalap meg az FE négyzete. Vonjuk le a közös FE négyzetét. Az AE-ből, EC-ből alkotott maradék téglalap tehát egyenlő a DE-ből, EB-ből alkotott téglalappal.

Ha tehát a körben két egyenes egymást metszi, az egyik (egyenes) szeleteiből alkotott téglalap egyenlő a másik (egyenes) szeleteiből alkotott téglalappal. Ezt kellett bebizonyítanunk.

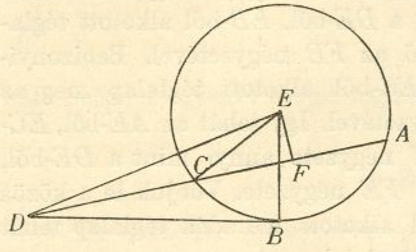
36.

Ha a körön kívül egy pontot felveszünk és ebből a körhöz két egyenest húzunk, melyeknek egyike metszi a kört, másika pedig érinti, az egész metszőből és ennek a pont és a kerület domború része közötti külső részéből alkotott téglalap egyenlő az érintő négyzetével.



Vegyük fel az ABC körön kívül a D pontot és húzzuk meg a D-ből az ABC körhöz a két $DC(DA)$, DB egyenest. És a DCA messe az ABC kört, a BD pedig érintse. Azt mondom, hogy az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap egyenlő a DB négyzetével.

A (DA) CA egyenes vagy átmegy a középponton vagy nem. Menjen először a középponton át, legyen F az ABC kör középpontja és húzzuk meg FB-t. Az FBD tehát derékszög (III. 18.). És minthogy az AC egyenest megfelezi az F, hozzáadódik pedig CD, az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap meg az FC négyzete egyenlő az FD négyzetével (II. 6.). Az FC pedig egyenlő az FB-vel. Igy tehát az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap meg az FB négyzete egyenlő az FD négyzetével. De az FD négyzete annyi mint az FB és a BD négyzete (I. 47.). Igy tehát az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap meg az FB négyzete annyi, mint az FB és a BD négyzete. Vonjuk le a közös FB négyzetét. Igy tehát az AD-ből, DC-ből alkotott maradék téglalap egyenlő a DB érintő négyzetével.



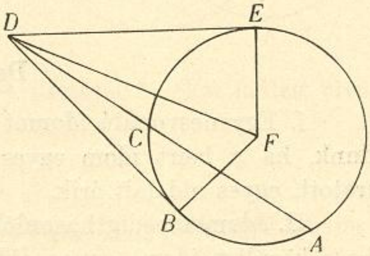
De ne menjen a DCA az ABC kör középpontján át; vegyük fel a középpontot E-ben, húzzuk meg az E-ből az AC-re merőleges EF-et és húzzuk meg EB-t, EC-t, ED-t. Az EBD tehát derékszög (III. 18.). És minthogy a középponton átmenő EF egyenes a nem a középponton átmenő AC egyenest derékszögben metszi, ezt meg is felezi (III. 3.). Az AF tehát egyenlő az FC-vel. És minthogy az AC egyenest megfelezi az F pont, hozzáadódik pedig CD, az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap meg az FC négyzete egyenlő az FD négyzetével (II. 6.). Adjuk hozzá a közös FE négyzetét. Igy tehát az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap meg a CF és az FE négyzete annyi, mint az FD és az FE négyzete. De a CF és az FE négyzete egyenlő az EC négyzetével (I. 47.). Mert az EFC (szög) derékszög. A DF és az FE négyzete pedig egyenlő az ED négyzetével (I. 47.). Igy tehát az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap meg az EC négyzete egyenlő az ED négyzetével. Az EC pedig egyenlő az EB-vel. Igy tehát az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap meg az EB négyzete egyenlő az ED négyzetével. Az ED négyzete pedig annyi, mint az EB és a BD négyzete (I. 47.). Mert az EBD szög derékszög. Igy tehát az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap meg az EB négyzete annyi, mint az EB és a BD négyzete. Vonjuk le a közös EB négyzetét. Igy tehát az AD-ből, DC-ből alkotott maradék téglalap egyenlő a DB négyzetével.

Ha tehát a körön kívül egy pontot felveszünk és ebből a körhöz két egyenest húzunk, melyeknek egyike metszi a kört, másika pedig érinti, az egész metszőből és ennek a pont és a kerület domború része közötti külső részéből alkotott téglalap egyenlő az érintő négyzetével. Ezt kellett bebizonyitanunk.

37.

Ha a körön kívül egy pontot felveszünk, ebből pedig a körhöz két egyenest húzunk, melyeknek egyike metszi a kört, másika pedig éri és az egész metszőből és ennek a pont és a kerület domború része közötti külső részéből alkotott téglalap egyenlő a körhöz érő egyenes négyzetével, a körhöz érő egyenes érinti a kört.

Vegyük fel az ABC körön kívül a D pontot, a D pontból húzzuk meg az ABC körhöz a két DCA, DB egyenest; a DCA messe a kört, a DB pedig érje és az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap legyen egyenlő a DB négyzetével. Azt mondom, hogy a DB érinti az ABC kört.



Húzzuk meg az ABC-t érintő DE-t (III. 17.), vegyük fel az ABC kör középpontját, legyen ez F és húzzuk meg FE-t, FB-t, FD-t. Az FED tehát derékszög (III. 18.). És minthogy a DE érinti az ABC kört, a DCA pedig metszi, az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap egyenlő a DE négyzetével (III. 36.). De az AD-ből, DC-ből alkotott téglalap egyenlő a DB négyzetével is. Tehát a DE négyzete egyenlő a DB négyzetével. A DE tehát egyenlő a DB-vel. Az FE pedig egyenlő az FB-vel. Igy a két DE, EF egyenlő a két DB-vel, BF-fel. És a közös alap az FD. A DEF szög tehát egyenlő a DBF szöggel (I. 8.). A DEF pedig derékszög. Igy tehát a DBF is derékszög. Az FB meghosszabítása pedig átmérő. A kör átmérője, annak végpontjában emelt merőleges pedig érinti a kört (III. 16. feladat porizmája). A DB tehát érinti az ABC kört. Hasonlóképen bebizonyítjuk ezt, ha a középpont az AC-be esik.

Ha tehát a körön kívül egy pontot felveszünk, ebből pedig a körhöz két egyenest húzunk, melyeknek egyike metszi a kört, másika pedig éri és az egész metszőből és ennek a pont és a kerület domború része közötti külső részéből alkotott téglalap egyenlő a körhöz érő egyenes négyzetével, a körhöz érő egyenes érinti a kört. Ezt kellett bebizonyítanunk.

IV. KÖNYV.

Definiciók.

I. Egyenesvonalú idomot egyenesvonalú idomba írottnak mondunk, ha a beírt idom egyes szögei annak (az idomnak), melybe iratott, egyes oldalait érik.

II. Idomot pedig hasonlóképen idom köré írottnak mondunk, ha a körülírt (idom) egyes oldalai annak (az idomnak), mely köré iratott, egyes szögeit érik.

III. Egyenesvonalú idomot körbe írottnak mondunk, ha a beírt (idom) egyes szögei a kör kerületét érik.

IV. Egyenesvonalú idomot pedig kör köré írottnak mondunk, ha a körülírt (idom) egyes oldalai a kör kerületét érintik.

V. Kört pedig hasonlóképen idomba írottnak mondunk, ha a kör kerülete annak (az idomnak), melybe iratott, egyes oldalait érinti.

VI. Kört pedig idom köré írottnak mondunk, ha a kör kerülete annak (az idomnak), mely köré iratott, egyes szögeit éri.

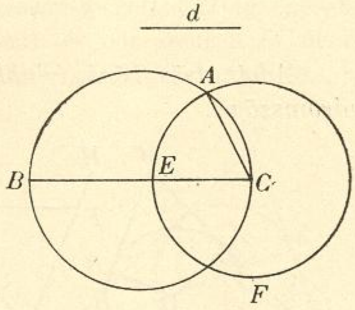
VII. Azt mondjuk, hogy egy egyenes a körbe van illesztve, ha annak végei a kör kerületében vannak.

1.

Adott körbe illesszünk egyenest, mely a kör átmérőjénél nem nagyobb, adott egyenessel egyenlő.

Legyen az adott kör ABC, az adott egyenes pedig, mely a kör átmérőjénél nem nagyobb, d. Ebbe az ABC körbe illesszünk egy a d egyenessel egyenlő egyenest.

Húzzuk meg az ABC körnek BC átmérőjét. Ha BC épen egyenlő d-vel, máris elvégeztük azt, amit kitűztünk. Mert beleillesztettük az ABC körbe a d egyenessel egyenlő BC-t. Legyen azonban a BC nagyobb a d-nél; tegyük egyenlővé d-vel CE-t, rajzoljuk C középpont köré CE sugárral az EAF kört és húzzuk meg CA-t.



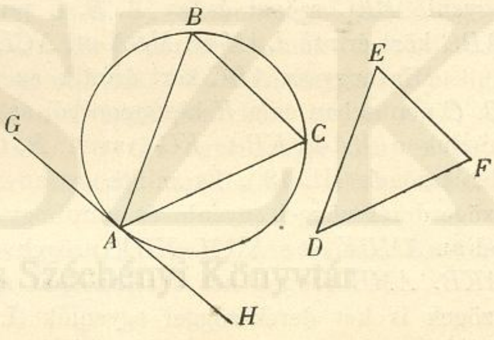
Minthogy a C pont az EAF kör középpontja, CA egyenlő CE-vel. De CE egyenlő d-vel. Igy tehát CA is egyenlő d-vel.

Tehát az adott ABC körbe az adott d egyenessel egyenlő CA-t illesztettük. Ezt kellett elvégeznünk.

2.

Adott körbe írjunk adott háromszöggel egyenlőszögű háromszöget.

Legyen az adott kör ABC, az adott háromszög pedig DEF. Az ABC körbe írjuk a DEF háromszöggel egyenlőszögű háromszöget.



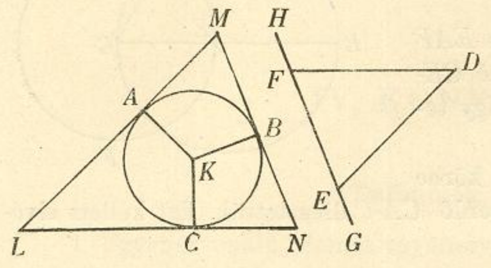
Húzzuk meg az ABC kört A-ban érintő GH érintőt (III. 17.), szerkeszszük az AH egyenesre annak A pontjában a DEF szöggel egyenlő HAC-t, az AG egyenesre pedig annak A pontjában a DFE szöggel egyenlő GAB szöget és húzzuk meg BC-t.

Minthogy az ABC kört érinti az AH egyenes és az A érintési pontból a körben az AC egyenest húztuk, a HAC szög egyenlő a szembenfekvő ABC kerületi szöggel (III. 32.). De a HAC szög egyenlő a DEF szöggel. Tehát az ABC szög is egyenlő a DEF szöggel. Ugyanebből az okból az ACB szög egyenlő a DFE szöggel. Igy tehát a harmadik BAC szög is egyenlő a harmadik EDF szöggel. (Az ABC háromszög tehát egyenlőszögű a DEF háromszöggel és az ABC körbe írtuk.)

Adott körbe tehát adott háromszöggel egyenlőszögű háromszöget írtunk. Ezt kellett elvégeznünk.

3.

Adott kör köré írjunk adott háromszöggel egyenlőszögű háromszöget.



Legyen az adott kör *ABC*, az adott háromszög pedig *DEF*. Az *ABC* kör köré írjuk a *DEF* háromszöggel egyenlőszögű háromszöget.

Hosszabbítsuk meg *EF*-et mindegyik oldalán a *G*, *H* pontokig, vegyük fel az *ABC* kör középpontját *K*-ban, húzzuk meg akárhogyan a *KB* egyenest, szerkesszük meg a *KB* egyenesre annak *K* pontjában a *DEG* szöggel egyenlő *BKA* szöget, majd pedig a *DFH* szöggel egyenlő *BKC* szöget és az *A*, *B*, *C* pontokban húzzuk meg az *ABC* kört érintő *LAM*-et, *MBN*-et, *NCL*-et (III. 17.).

Minthogy az *ABC* kört érintik az *LM*, az *MN*, az *NL* az *A*, *B*, *C* pontokban és a *K* középpontból az *A*, *B*, *C* pontokhoz meghúztuk a *KA*-t, *KB*-t, *KC*-t, az *A*, *B*, *C* pontoknál fekvő szögek derékszögek (III. 18.). És minthogy az *AMBK* négyszögnek négy szöge derékszöggel egyenlő és minthogy két háromszögre osztható fel az *AMBK* és a *KAM*, *KBM* szögek derékszögek, a fenmaradt *AKB*, *AMB* szögek két derékszöggel egyenlők. De a *DEG*, *DEF* szögek is két derékszöggel egyenlők (I. 13.). Igy tehát az *AKB*, *AMB* szögek egyenlők a *DEG*, *DEF* szögekkel, melyek közül az *AKB* szög egyenlő a *DEG* szöggel. Ennélfogva a harmadik *AMB* szög egyenlő a harmadik *DEF* szöggel. Hasonlóképen bebizonyitjuk, hogy az *LNB* szög egyenlő a *DFE* szöggel. És a harmadik *MLN* szög is egyenlő az *EDF* szöggel. Az *LMN* háromszög tehát egyenlőszögű a *DEF* háromszöggel. És az *ABC* kör köré írtuk.

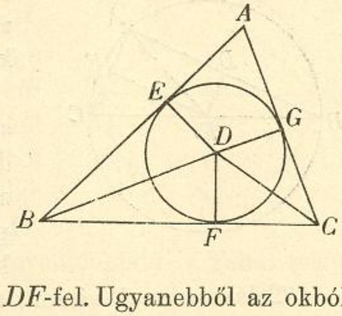
Adott kör köré tehát adott háromszöggel egyenlőszögű háromszöget írtunk. Ezt kellett elvégeznünk.

4.

Adott háromszögbe írjunk kört.

Legyen az adott háromszög *ABC*. Ebbe az *ABC* háromszögbe írjunk kört.

Felezzük meg a ABC, ACB szögeket a BD, CD egyenesekkel (I. 9.), melyek D pontban találkoznak és bocsássuk a D-ből az AB, BC, CA egyenesekre a DE, DF, DG merőlegeseket (I. 12.).

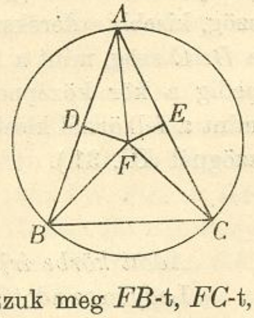


Minthogy az ABD szög egyenlő a CBD-vel, a BED derékszög pedig egyenlő a BFD derékszöggel, a két EBD, FBD háromszögnek két szöggel egyenlő két szöge van és az egyik oldal egyenlő az egyik oldallal, még pedig az, melyet az egyenlő szögek egyike átfog, a közös BD. Így tehát a másik két oldal is egyenlő a másik két oldallal (I. 26.). A DE tehát egyenlő a DF-fel. Ugyanebből az okból a DG is egyenlő a DF-fel. Tehát a három DE, DF, DG egyenes egyenlő egymással. Így tehát a D középpont köré írt és az E, F, G pontokon átmenő kör a többi pontokon is átmegy és az AB, BC, CA egyeneseket érinti, mert az E, F, G pontoknál derékszögek vannak. Mert ha metszi őket, a kör átmérőjére annak végpontjában emelt merőleges a körön kívül esik (III. 16.). Bebizonyítottuk pedig, hogy ez képtelenség. Tehát a D középpont köré írt, az E, F, G pontokon átmenő kör az AB, BC, CA egyeneseket nem metszi. Érinti tehát őket és a kört az ABC háromszögbe írtuk. A beírt (kör) az FGE.

Az adott ABC háromszögbe tehát az EFG kört írtuk. Ezt kellett elvégeznünk.

5.

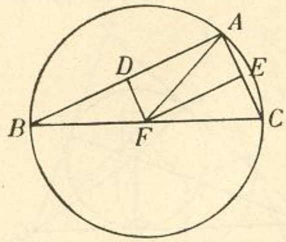
Adott háromszög köré írjunk kört.



Legyen az adott háromszög ABC. Ez adott ABC háromszög köré írjunk kört.

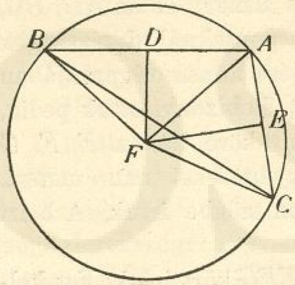
Felezzük meg az AB, AC egyeneseket D, E pontokban (I. 10.) és emeljük a D, E pontokból az AB-re, AC-re merőleges DF-et, EF-et (I. 11.). Ezek vagy az ABC háromszögön belül, vagy a BC egyenesben vagy a BC-n kívül találkoznak.

Találkozzanak először belül F-ben és húzzuk meg FB-t, FC-t, FA-t. És minthogy AD egyenlő DB-vel, közös pedig és merőleges a DF, az AF alap egyenlő az FB alappal (I. 4.). Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy CF egyenlő AF-fel. És így FB is egyenlő FC-vel. Tehát a három FA, FB, FC egyenlő egymással. Így tehát az F középpont köré írt és az A, B, C pontokon átmenő kör a többi pontokon is átmegy és az ABC háromszög köré írt kör. A körülírt (kör) az ABC.



Találkozzanak azonban a DF, EF a BC egyenesben F-ben, mint a második rajzban és húzzuk meg AF-t. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az F pont középpontja az ABC háromszög köré írt körnek.

Találkozzanak viszont a DF, EF az ABC háromszögön kívül F-ben, mint a harmadik rajzban és húzzuk meg AF-et, BF-et, CF-et. És minthogy viszont AD egyenlő DB-vel, közös pedig és merőleges a DF, az AF alap egyenlő a BF alappal (I. 4.). Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy CF egyenlő AF-fel. És így a BF is egyenlő az FC-vel. Így tehát az F középpont köré, az FA, FB, FC bármelyikével írt kör a többi pontokon is átmegy és az ABC háromszög köré írt (kör).



Adott háromszög köré tehát kört írtunk. Ezt kellett elvégeznünk.

(Porizma, következmény).

És kitünik, hogyha a háromszögön belül esik a kör középpontja, a BAC szög, mint a félkörnél nagyobb ívben fekvő kerületi szög, kisebb a derékszögnél. Ha a BC egyenesbe esik a középpont, a BAC szög, mint a félkör kerületi szöge, derékszöggel egyenlő. Ha pedig a kör középpontja a háromszögön kívül esik, a BAC szög mint a félkörnél kisebb ívben fekvő kerületi szög, nagyobb a derékszögnél (III. 31.).

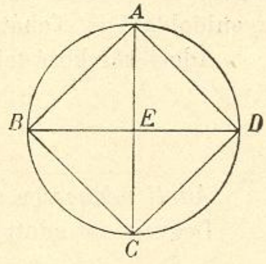
6.

Adott körbe írjunk négyzetet.

Legyen az adott kör $ABCD$. Az $ABCD$ körbe írjunk négyzetet.

Húzzuk meg az $ABCD$ körnek egymásra merőleges két AC, BD átmérőjét és húzzuk meg AB-t, BC-t, CD-t, DA-t.

Minthogy BE egyenlő ED-vel, mert E a középpont, közös pedig és merőleges az EA, az AB alap egyenlő az AD alappal (I. 4.). Ugyanebből az okból a BC, CD mindegyike egyenlő az AB, AD mindegyikével. Az $ABCD$ négyszög tehát egyenlőoldalú. Azt mondom, hogy egyenlőszögű is. Minthogy a BD egyenes az $ABCD$ kör átmérője, a BAD félkör. A BAD szög tehát derékszög (III. 31.). Ugyanebből az okból az ABC, BCD, CDA szögek mindegyike derékszög. Az $ABCD$ négyszög tehát derékszögű. Bebizonyítottuk pedig, hogy egyenlőoldalú is. Tehát négyzet. És az $ABCD$ körbe írtuk.



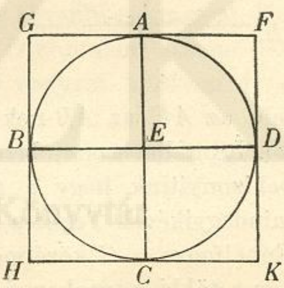
Az adott körbe írt négyzet tehát az $ABCD$. Ezt kellett elvégeznünk.

7.

Adott kör köré írjunk négyzetet.

Legyen az adott kör $ABCD$. Az $ABCD$ kör köré írjunk négyzetet.

Húzzuk meg az $ABCD$ körnek egymásra merőleges két AC, BD átmérőjét és az A, B, C, D pontokban húzzuk meg a kört érintő FG-t, GH-t, HK-t, KF-et.



Minthogy ez FG az $ABCD$ kört érinti, az E középpontból az A érintési ponthoz húzott (egyenes) pedig EA, az A-nál fekvő szögek derékszögek (III. 18.). Ugyanebből az okból a B, C, D pontoknál fekvő szögek is derékszögek. És minthogy az AEB szög derékszög és az EBG is derékszög, a GH párhuzamos az AC-vel (I. 29.). Ugyanebből az okból az AC-vel párhuzamos az FK is. Így tehát a GH az FK-val is párhuzamos (I. 30.). Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a GF, HK mindegyike a BED-vel párhuzamos. Parallelogrammok tehát a GK, GC, AK, FB, BK. A GF tehát egyenlő a HK-val, a GH pedig az FK-val (I. 34.). És minthogy az AC egyenlő a BD-vel, de az AC a GH, FK, a BD pedig a GF, HK mindegyikével egyenlő (és így tehát a GH, FK mindegyike a GF, HK mindegyikével egyenlő) az $FGHK$ négyszög egyenlőoldalú. Azt mondom, hogy derékszögű is. Minthogy parallelogramm a $GBEA$

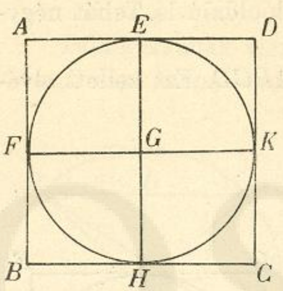
és derékszög az AEB, az AGB is derékszög (I. 34.). Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a H-nál, K-nál, F-nél fekvő szögek is derékszögek. Az $FGHK$ tehát derékszögű. Bebizonyítottuk pedig, hogy egyenlőoldalú is. Tehát négyzet. És az $ABCD$ kör köré írtuk.

Adott kör köré tehát négyzetet írtunk. Ezt kellett elvégeznünk.

8.

Adott négyzetbe írjunk kört.

Legyen az adott négyzet $ABCD$. Az $ABCD$ négyzetbe írjunk kört.



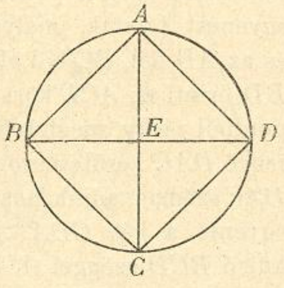
Felezzük meg az AD, AB mindegyikét E, F pontokban és húzzuk meg az E-ből az AB, CD valamelyikével párhuzamos EH-t, az F-ből pedig az AD, BC valamelyikével párhuzamos FK-t. Parallelogrammok tehát az AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD valamennyi és szembenfekvő oldalaik egymással egyenlők (I. 34.). És minthogy AD egyenlő AB-vel és az AD-nek a fele az AE, az AB-nek fele pedig az AF, az AE egyenlő az AF-fel. Így tehát a szembenfekvő FG, GE is egyenlők. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a GH, GK mindegyike egyenlő az FG, GE mindegyikével. Tehát a négy GE, GF, GH, GK egyenlő egymással. Ennélfogva a G középpont köré írt, az E-n, F-en, H-n, K-n átmenő kör a többi pontokon is átmegy. És érinti az AB, BC, CD, DA egyeneseket, mert derékszögek az E-nél, F-nél, H-nál, K-nál fekvő szögek. Mert ha a kör az AB-t, BC-t, CD-t, DA-t metszi, az átmérőre, annak végpontjában emelt merőleges a körön belül esik (III. 16.). Bebizonyítottuk pedig, hogy ez képtelenség. Így tehát a G középpont köré írt, az E-n, F-en, H-n, K-n átmenő kör nem metszi az AB, BC, CD, DA egyeneseket. Érinti tehát őket és bele van írva az $ABCD$ négyzetbe.

Adott négyzetbe tehát kört írtunk. Ezt kellett elvégeznünk.

9.

Adott négyzet köré írjunk kört.

Legyen az adott négyzet $ABCD$. Az $ABCD$ négyzet köré írjunk kört.



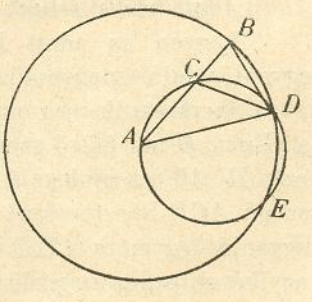
Messék az AC, BD egymást E-ben. Minthogy DA egyenlő AB-vel, közös pedig az AC, a két DA, AC egyenlő a két BA-val, AC-vel. És a DC alap egyenlő a BC alappal. A DAC szög tehát egyenlő a BAC szöggel. A DAB szöget tehát megfelezi az AC. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az ABC, BCD, CDA mindegyikét megfelezik az AC, DB egyenesek. És minthogy a DAB szög egyenlő az ABC szöggel és a DAB-nek fele az EAB, az ABC-nek fele pedig az EBA, az EAB tehát egyenlő az EBA-val. Ennélfogva az EA oldal is egyenlő az EB-vel (I. 6.). Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az EA, EB (egyenesek) mindegyike egyenlő az EC, ED mindegyikével. A négy EA, EB, EC, ED tehát egyenlő egymással. Tehát az E középpont köré írt és az A, B, C, D pontokon átmenő kör a többi pontokon is átmegy és az $ABCD$ négyzet köré van írva. A körülírt (kör) az $ABCD$.

Adott négyzet köré tehát kört írtunk. Ezt kellett elvégeznünk.

10.

Szerkesszünk egyenlőszárú háromszöget, melyben az alap mellett fekvő szögek mindegyike kétszerese a harmadiknak.

Helyezzük el az AB egyenest és messük C pontban úgy, hogy az AB-ből, BC-ből alkotott téglalap egyenlő legyen a CA négyzetével (II. 11.). Rajzoljuk meg az A középpont köré AB sugárral a BDE kört és illesszük a BDE körbe, a BDE kör átmérőjénél nem nagyobb AC egyenessel egyenlő BD egyenest (IV. 1.). Húzzuk meg AD-t, DC-t és írjuk az ACD háromszög köré az ACD kört (IV. 5.).



Minthogy az AB-ből, BC-ből alkotott téglalap egyenlő az AC négyzetével, AC pedig egyenlő BD-vel, az AB-ből, BC-ből alkotott téglalap egyenlő a BD négyzetével. És minthogy az ACD körön kívül vettük fel a B pontot és a B-ből az ACD körhöz a két BA, BD egyenest húztuk, melyeknek egyike metszi, másika pedig éri azt és az AB-ből, BC-ből alkotott téglalap egyenlő a BD négyzetével, a BD érinti az ACD kört (III. 37.). Minthogy a BD érinti, a D érintési pontból pedig meghúztuk a DC-t, a BDC szög egyenlő a szembenfekvő DAC kerületi szöggel (III. 32.). Minthogy a BDC szög egyenlő a DAC szöggel, adjuk hozzá a közös CDA-t. Tehát az egész BDA szög egyenlő a két CDA, DAC szöggel. De a CDA, DAC egyenlő a külső BCD szöggel (I. 32.). Így tehát a BDA szög egyenlő a BCD szöggel. De a BDA szög egyenlő a CBD szöggel, minthogy az AD oldal egyenlő az AB-vel (I. 5.). Ennélfogva a DBA szög is egyenlő a BCD szöggel. Tehát a három BDA, DBA, BCD szög egyenlő egymással. És minthogy a DBC szög egyenlő a BCD szöggel, a BD oldal is egyenlő a DC oldallal (I. 6.). De BD-t CA-val egyenlőnek vettük fel. A CA tehát egyenlő a CD-vel. Ennélfogva a CDA szög is egyenlő a DAC szöggel (I. 5.). Így tehát a CDA, DAC a DAC kétszerese. A BCD pedig egyenlő a CDA, DAC szögekkel. A BCD tehát a CAD kétszerese. A BCD pedig egyenlő a BDA, DBA mindegyikével. Tehát a BDA, DBA mindegyike a DAB kétszerese.

Tehát megszerkesztettük az ABD egyenlőszárú háromszöget, melyben a DB alapja mellett fekvő szögek mindegyike kétszerese a harmadiknak. Ezt kellett elvégeznünk.

11.

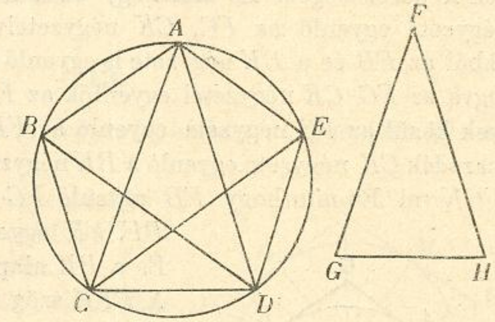
Adott körbe írjunk egyenlőoldalú és egyenlőszögű ötszöget.

Legyen az adott kör $ABCDE$. Az $ABCDE$ körbe írjunk egyenlőoldalú és egyenlőszögű ötszöget.

Szerkesszük meg az FGH egyenlőszárú háromszöget, melyben a G-nél, H-nál fekvő szögek mindegyike kétszerese az F-nél fekvőnek (IV. 10.) és írjuk az $ABCD$ körbe az FGH háromszöggel egyenlőszögű ACD háromszöget (IV. 2.) úgy, hogy az F-nél fekvő szöggel egyenlő legyen a CAD szög, a G-nél, H-nál fekvő szögek mindegyikével pedig egyenlő az ACD, CDA mindegyike. És az ACD, CDA mindegyike a CAD kétszerese. Felezzük meg az ACD, CDA

mindegyikét a *CE, DB* egyenesekkel és húzzuk meg *AB*-t, *BC*-t, *DE*-t, *EA*-t.

Minthogy az *ACD*, *CDA* szögek mindegyike kétszerese a *CAD*-nek és megfeleztük őket a *CE*, *DB* egyenesekkel, az öt *DAC, ACE, ECD, CDB, BDA* szög egyenlő egymással. Az egyenlő szögek pedig egyenlő íveken állanak (III. 26.). Tehát az öt



AB, BC, CD, DE, EA ív egyenlő egymással. Az egyenlő ívek pedig egyenlő egyeneseket fognak át (III. 29.). Tehát az öt *AB, BC, CD, DE, EA* egyenes egyenlő egymással. Az *ABCDE* ötszög tehát egyenlőoldalú. Azt mondom, hogy egyenlőszögű is. Minthogy az *AB* ív egyenlő a *DE* ívvel, adjuk hozzá a közös *BCD*-t. Az egész *ABCD* ív tehát egyenlő az egész *EDCB* ívvel. És az *ABCD* íven áll az *AED* szög, az *EDCB* íven pedig a *BAE* szög. És így a *BAE* szög egyenlő az *AED* szöggel (III. 27.). Ugyanebből az okból az egyes *ABC, BCD, CDE* szögek mindegyike egyenlő a *BAE, AED* szögek mindegyikével. Az *ABCDE* ötszög tehát egyenlőszögű. Bebizonyítottuk pedig, hogy egyenlőoldalú is.

Adott körbe tehát egyenlőoldalú és egyenlőszögű ötszöget írtunk. Ezt kellett elvégeznünk.

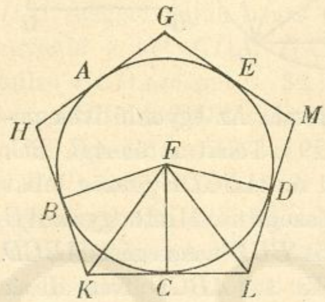
12.

Adott kör köré írjunk egyenlőodalú és egyenlőszögű ötszöget.

Legyen az adott kör *ABCDE*. Az *ABCDE* kör köré írjunk egyenlőoldalú és egyenlőszögű ötszöget.

Tegyük fel, hogy a beírt ötszög szögeinek pontjai az *A, B, C, D, E*, úgy hogy az *AB, BC, CD, DE, EA* ívek egyenlők. Húzzuk meg az *A, B, C, D, E* pontokban a kört érintő *GH*-t, *HK*-t, *KL*-et, *LM*-et, *MG*-t, vegyük fel az *ABCDE* kör középpontját *F*-ben és húzzuk meg *FB*-t, *FK*-t, *FC*-t, *FL*-et, *FD*-t.

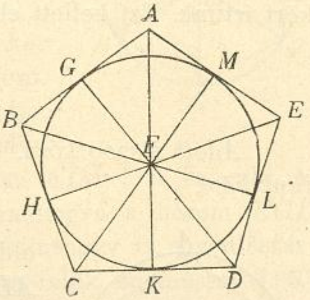
Minthogy a *KL* egyenes érinti az *ABCDE* kört *C*-ben, az *F* középpontból a *C* érintési ponthoz húzott (egyenes) pedig *FC*, az *FC* merőleges a *KL*-re (III. 18.). A *C*-nél fekvő szögek mindegyike tehát derékszög. Ugyanebből az okból a *B, D* pontoknál fekvő szögek is derékszögek. És minthogy az *FCK* szög derékszög, az *FK* négyzete egyenlő az *FC, CK* négyzeteivel (I. 47.). Ugyanebből az okból az *FB* és a *BK* négyzete is egyenlő az *FK* négyzetével. Ennélfogva az *FC, CK* négyzetei egyenlők az *FB, BK* négyzeteivel, amelyek közül az *FC* négyzete egyenlő az *FB* négyzetével. Igy tehát a maradék *CK* négyzete egyenlő a *BK* négyzetével. A *BK* tehát egyenlő a *CK*-val. És minthogy *FB* egyenlő *FC*-vel és közös az *FK*, a két *BF, FK* egyenlő a két *CF*-fel, *FK*-val. És a *BK* alap egyenlő a *CK* alappal. A *BFK* szög tehát egyenlő a *KFC* szöggel (I. 8.). A *BKF* pedig a *FKC*-vel. A *BFC* szög tehát a *KFC* kétszerese, a *BKC* pedig az *FKC*-é. Ugyanebből az okból a *CFD* szög is a *CFL* kétszerese, a *DLC* pedig az *FLC*-é. És minthogy a *BC* ív egyenlő a *CD*-vel, a *BFC* szög egyenlő a *CFD*-vel (III. 27.). És a *BFC* szög a *KFC* kétszerese, a *DFC* pedig az *LFC*-é. A *KFC* tehát egyenlő az *LFC*-vel. Az *FCK* szög pedig egyenlő az *FCL*-lel. A két *FKC, FLC* háromszögnek tehát két szöggel egyenlő két szöge van és az egyik oldal egyenlő az egyik oldallal, a közös *FC*. És így tehát a másik két oldal is egyenlő a másik két oldallal, a harmadik szög a harmadik szöggel (I. 26.). A *KC* egyenes tehát a *CL*-lel egyenlő, az *FKC* szög pedig az *FLC*-vel. És minthogy a *KC* egyenlő a *CL*-lel, a *KL* a *KC* kétszerese. Ugyanebből az okból bebizonyítjuk, hogy a *HK* a *BK* kétszerese. És a *BK* egyenlő a *KC*-vel. A *HK* tehát a *KL*-lel egyenlő. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a *HG, GM, ML* mindegyike egyenlő a *HK, KL* mindegyikével. A *GHKLM* ötszög tehát egyenlőoldalú. Azt mondom pedig, hogy egyenlőszögű is. Minthogy az *FKC* szög egyenlő az *FLC*-vel és bebizonyítottuk, hogy az *FKC* kétszerese a *HKL*, az *FLC* kétszerese pedig a *KLM*, a *HKL* szög egyenlő a *KLM* szöggel. Hasonlóképen bebizonyítjuk. hogy a *KHG, HGM, GML* szögek mindegyike egyenlő a *HKL, KLM* szögek mindegyikével. Az öt *GHK, HKL, KLM, LMG, MGH* szög tehát egyenlő egymással. A *GHKLM* ötszög tehát egyenlőszögű. Bebizonyítottuk pedig, hogy egyenlőoldalú is és az *ABCDE* kör köré iratott.



(Adott kör köré tehát egyenlőoldalú és egyenlőszögű ötszöget írtunk). Ezt kellett elvégeznünk.

13.

Adott ötszögbe, mely egyenlőoldalú és egyenlőszögű, írjunk kört.



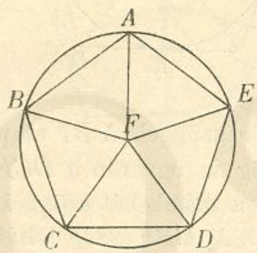
Legyen az adott egyenlőoldalú és egyenlőszögű ötszög *ABCDE*. Az *ABCDE* ötszögbe írjunk kört.

Felezzük meg a *BCD, CDE* szögek mindegyikét a *CF, DF* egyenesekkel. És az *F* pontból, melyben a *CF, DF* egyenesek egymást metszik, húzzuk meg az *FB, FA, FE* egyeneseket. És minthogy *BC* egyenlő *CD*-vel, közös pedig a *CF*, a két *BC, CF* egyenlő a két *DC*-vel, *CF*-fel. És a *BCF* szög egyenlő a *DCF* szöggel. A *BF* alap tehát egyenlő a *DF* alappal, a *BCF* háromszög is egyenlő a *DCF* háromszöggel és a másik két szög is egyenlő a másik két szöggel, melyeket az egyenlő oldalok átfognak (I. 4.). A *CBF* szög tehát egyenlő a *CDF* szöggel. És minthogy a *CDE* a *CDF* kétszerese, a *CDE* pedig egyenlő az *ABC*-vel, a *CDF* meg a *CBF*-fel, a *CBA* a *CBF* kétszerese. Az *ABF* szög tehát egyenlő az *FBC*-vel. Az *ABC* szöget tehát megfelezi a *BF* egyenes. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a *BAE, AED* szögek mindegyikét megfelezik az *FA, FE* egyenesek. Húzzuk meg az *F* pontból az *AB, BC, CD, DE, EA* egyenesekre merőleges *FG*-t, *FH*-t, *FK*-t, *FL*-et, *FM*-et. És minthogy a *HCF* szög egyenlő a *KCF*-fel, az *FHC* derékszög pedig egyenlő az *FKC* derékszöggel, a két *FHC, FKC* háromszögnek két szöggel egyenlő két szöge van és az egyik oldal egyenlő az egyik oldallal, a közös *FC*, melyet az egyenlő szögek egyike átfog. Így tehát a másik két oldal is egyenlő a másik két oldallal (I. 26.). Tehát az *FH* merőleges egyenlő az *FK* merőlegessel. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az egyes *FL, FM, FG* mindegyike egyenlő az *FH, FK* mindegyikével. Tehát az öt *FG, FH, FK, FL, FM* egyenes egyenlő egymással. Tehát az *F* középpont köré írt és a *G, H, K, L, M* pontokon átmenő kör a többi pontokon is átmegy és az *AB, BC, CD, DE, EA* egyeneseket érinti, mert a *G, H, K, L, M* pontoknál fekvő szögek derékszögek. Mert ha nem érinti, hanem metszi őket, a kör átmérőjére, annak végpontjában szerkesztett merőleges a körön belül esik. Bebizonyítottuk azonban, hogy ez képtelenség (III. 16.). Igy tehát az *F* középpont köré írt és a *G, H, K, L, M* pontokon átmenő kör nem metszi az *AB, BC, CD, DE, EA* egyeneseket. Tehát érinti őket. A beirt (kör) a *GHKLM*.

Adott ötszögbe tehát, mely egyenlőoldalú és egyenlőszögű, kört írtunk. Ezt kellett elvégeznünk.

14.

Adott ötszög köré, mely egyenlőoldalú és egyenlőszögű, írjunk kört.



Legyen az adott ötszög, mely egyenlőoldalú és egyenlőszögű, az *ABCDE*. Az *ABCDE* ötszög köré írjunk kört.

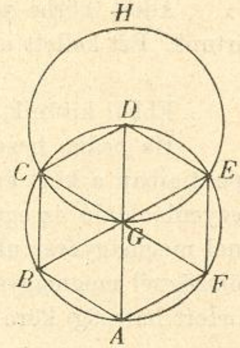
Felezzük meg a *BCD, CDE* szögek mindegyikét a *CF, DF* egyenesekkel és az *F* pontból, melyben az egyenesek találkoznak, húzzuk meg a *B, A, E* pontokhoz az *FB, FA, FE* egyeneseket. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az egyes *CBA, BAE, AED* szögeket az egyes *FB, FA, FE* egyenesek megfelezik. És minthogy a *BCD* szög egyenlő a *CDE*-vel és a *BCD* fele az *FCD*, a *CDE* fele pedig a *CDF*, az *FCD* egyenlő az *FDC*-vel. Ennélfogva az *FC* oldal egyenlő az *FD* oldallal (I. 6.). Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az *FB, FA, FE* mindegyike egyenlő az *FC, FD* mindegyikével. Az öt *FA, FB, FC, FD, FE* tehát egyenlő egymással. Tehát az *F* középpont köré és az *FA, FB, FC, FD, FE* valamelyikével írt kör a többi pontokon is átmegy és körül van írva. A körülírt (kör) az *ABCDE*.

Adott ötszög köré tehát, mely egyenlőoldalú és egyenlőszögű, kört írtunk. Ezt kellett elvégeznünk.

15.

Adott körbe írjunk egyenlőoldalú és egyenlőszögű hatszöget.

Legyen az adott kör *ABCDEF*. Az *ABCDEF* körbe írjunk egyenlőoldalú és egyenlőszögű hatszöget.



Húzzuk meg az *ABCDEF* kör *AD* átmérőjét, vegyük fel a kör középpontját *G*-ben, a *D* középpont köré rajzoljuk meg *DG* sugárral az *EGCH* kört, húzzuk meg *EG*-t, *CG*-t a *B*, *F* pontokig és húzzuk meg *AB*-t, *BC*-t, *CD*-t, *DE*-t, *EF*-et, *FA*-t. Azt mondom, hogy az *ABCDEF* az egyenlőoldalú és egyenlőszögű hatszög.

Minthogy a *G* pont az *ABCDEF* kör középpontja, *GE* egyenlő *GD*-vel. Viszont, minthogy a *D* pont a *GCH* kör középpontja, *DE* egyenlő *DG*-vel. Bebizonyítottuk pedig, hogy *GE* egyenlő *GD*-vel. Tehát a *GE* az *ED*-vel is egyenlő. Az *EGD* háromszög tehát egyenlőoldalú. Ennélfogva a három *EGD*, *GDE*, *DEG* szöge is egyenlő egymással, minthogy az egyenlőszárú háromszögben az alapnál fekvő szögek egyenlők egymással (I. 5.). És a háromszög három szöge két derékszöggel egyenlő (I. 32.). Az *EGD* szög tehát harmadrésze a két derékszögnek. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a *DGC* is harmadrésze a két derékszögnek. És minthogy a *CG* egyenes az *EB* egyenesen állva, az *EGC*, *CGB* szögeket két derékszöggel egyenlővé teszi (I. 13.), a harmadik *CGB* szög is harmadrésze a két derékszögnek. Tehát az *EGD*, *DGC*, *CGB* szögek egyenlők egymással. Ennélfogva ezek csúcsszögei, *BGA*, *AGF*, *FGE* is egyenlők (I. 15.). Tehát a hat *EGD*, *DGC*, *CGB*, *BGA*, *AGF*, *FGE* szög egyenlő egymással. Egyenlő szögek pedig egyenlő íveken állanak (III. 26.). Tehát a hat *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FA* ív egyenlő egymással. Egyenlő ívek pedig egyenlő egyeneseket fognak át (III. 29.). Tehát a hat egyenes egyenlő egymással. Az *ABCDEF* hatszög tehát egyenlőoldalú. Azt mondom, hogy egyenlőszögű is. Minthogy az *FA* ív egyenlő az *ED* ívvel, adjuk hozzá a közös *ABCD* ívet. Az egész *FABCD* ív tehát egyenlő az egész *EDCBA* ívvel. És az *FABCD* íven áll az *FED* szög, az *EDCBA* íven pedig az *AFE* szög. Tehát az *AFE* szög egyenlő a *DEF* szöggel (III. 27.). Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az *ABCDEF* hatszög többi szöge is egyenkint egyenlő az *AFE*, *FED* szögek mindegyikével. Az *ABCDEF* hatszög tehát egyenlőszögű. Bebizonyítottuk pedig, hogy egyenlőoldalú is. És az *ABCDEF* körbe van írva.

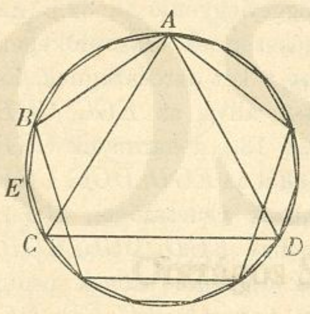
Adott körbe tehát egyenlőoldalú és egyenlőszögű hatszöget írtunk. Ezt kellett elvégeznünk.

Porizma (következmény).

Ebből kitünik, hogy a hatszög oldala egyenlő a kör sugarával. Ha pedig, hasonló módon, mint az ötszögnél, a kör osztási pontjaiban a kört érintő egyeneseket meghúzzuk, a kör köré irunk egyenlőoldalú és egyenlőszögű hatszöget, mint ahogyan az ötszögnél megmagyaráztuk (IV. 12.). És hasonlóképen, mint ahogyan az ötszögnél megmagyaráztuk (IV. 13. 14.), írunk adott hatszögbe és (adott hatszög) köré kört. Ezt kellett elvégeznünk.

16.

Adott körbe írjunk egyenlőoldalú és egyenlőszögű tizenötszöget.



Legyen az adott kör *ABCD*. Az *ABCD* körbe írjunk egyenlőoldalú és egyenlőszögű tizenötszöget.

Írjuk az *ABCD* körbe a beléje írt egyenlőoldalú háromszögnek *AC* oldalát, az egyenlőoldalú ötszögnek pedig *AB* oldalát. Ha tehát az *ABCD* kört tizenöt egyenlő részre osztjuk, az *ABC* ív, mely a kör harmadrésze, közülük öttel, az *AB* ív pedig, mely a kör ötödrésze, közülük hárommal egyenlő. A *BC* maradékív tehát kettővel egyenlő. Felezzük meg a *BC*-t *E*-ben (III. 30.). A *BE*, *EC* mindegyike tehát tizenötödrésze az *ABCD* körnek.

Ha tehát a meghúzott *BE*, *EC* egyenesekkel egyenlő szomszédos egyeneseket az *ABCD* körbe illesztjük (IV. 1.), a beléje írt tizenötszög egyenlőoldalú és egyenlőszögű. Ezt kellett elvégeznünk.

Ha pedig, hasonló módon, mint az ötszögnél (IV. 12.), a kör osztási pontjaiban a kört érintő egyeneseket meghúzzuk, a kör köré írunk egyenlőoldalú és egyenlőszögű tizenötszöget. És hasonlóképen, mint ahogyan az ötszögnél megtettük (IV. 13. 14.), irunk adott tizenötszögbe és (adott tizenötszög) köré kört. Ezt kellett elvégeznünk.

V. KÖNYV.

Definiciók.

I. *Rész* a nagyobb mennyiségnek kisebb mennyisége, ha a nagyobbat méri.

Rész itt az osztót jelenti, vagyis azt a számot, mely egy másik számban *egész szám szerint* foglaltatik.

II. *Többszöröse* pedig a nagyobbik a kisebbiknek, ha a kisebbik azt méri.

III. *Arány* két egynemű mennyiségnek mekkorasága tekintetében való viszonya.

IV. Azt mondjuk, hogy mennyiségek egymással *arányban vannak,* ha megszorozva egyik a másikat meghaladhatja.

V. Azt mondjuk, hogy mennyiségek *ugyanabban az arányban* vannak, az első a másodikhoz és a harmadik a negyedikhez, ha az elsőnek és a harmadiknak egyenlő többszörösei a másodiknak és a negyediknek egyenlő többszöröseit, bármely többszörösök szerint külön-külön, vagy egyszerre meghaladják vagy egyszerre egyenlők azokkal vagy egyszerre kisebbek azoknál a felvett sorrendben.

Az V. definició értelmezése mai jelölésünkkel ez: ha $a:b = c:d$, akkor $ma \gtreqless nb$ és egyidejűleg $mc \gtreqless nd$.

VI. Azokat a mennyiségeket, amelyek ugyanabban az arányban vannak, *arányosak*nak nevezzük.

VII. Ha pedig az egyenlő többszörösök közül az elsőnek többszöröse meghaladja a másodiknak többszörösét, a harmadiknak többszöröse azonban nem haladja meg a negyediknek többszörösét, azt mondjuk, hogy az első a másodikhoz *nagyobb arányban* van, mint a harmadik a negyedikhez.

VIII. Arányosság legkevesebb három tag között van.

IX. Ha három mennyiség arányos, azt mondjuk, az elsőnek a harmadikhoz való aránya *négyzete* a másodikhoz valónak.

Ha $a:b=b:c$, akkor $a:c=a^2:b^2$.

X. Ha pedig négy mennyiség arányos, azt mondjuk, az elsőnek a negyedikhez való aránya *köbe* a másodikhoz valónak és így hasonlóképen tovább, amint az arányosság kijelöli.

Ha $a:b=b:c=c:d$, akkor $a:d=a^3:b^3$ s í. t.

XI. *Megfelelő mennyiségek*nek mondjuk az előtagokat az előtagokhoz, a utótagokat pedig az utótagokhoz.

XII. *Felcserélt arány* az, amikor az előtagot az előtaghoz vesszük és az utótagot az utótaghoz.

XIII. *Megfordított arány* az, amikor az utótagot az előtag helyébe tesszük és az előtagot az utótag helyébe.

XIV. Az *arány összetétele* az, amikor az előtagot meg az utótagot vesszük magához az utótaghoz.

XV. Az *arány szétbontása* az, amikor a többletet vesszük, melylyel az előtag az utótagot meghaladja, magához az utótaghoz.

XVI. Az *arány eltolása* az, amikor az előtagot vesszük a többlethez, mellyel az előtag az utótagot meghaladja.

XVII. *Egyenlő arány* van több adott mennyiség és ezekkel számra nézve egyenlő más több mennyiség között, úgy hogy kettesével összekapcsolva, ugyanabban az arányban vannak, amikor is az előbbi mennyiségeknek elseje úgy aránylik azok utolsójához, miként az utóbbi mennyiségeknek elseje ezek utolsójához. Másképen: amikor a külső tagokat vesszük a belsők kihagyásával.

Ha $a_1:b_1=a_2:b_2=\ldots=a_n:b_n$, akkor $a_1:a_n=b_1:b_n$.

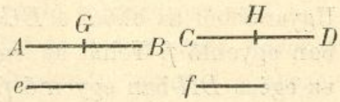
XVIII. *Zavart* pedig az arányosság, ha három adott mennyiség és ezekkel számra nézve egyenlő más mennyiség között az előbbi mennyiségeknek előtagja úgy aránylik azok utótagjához, miként az utóbbi mennyiségeknek előtagja ezek utótagjához, de az előbbi mennyiségeknek utótagja úgy aránylik azoknak egy másikához, miként az utóbbiaknak egy másika ezek előtagjához.

Ha az $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ mennyiségek között ezek az összefüggések állanak: $a_1:a_2=b_2:b_3$ és $a_2:a_3=b_1:b_2$.

1.

Ha bárhány mennyiség velük számra nézve egyenlő (bárhány) mennyiségnek külön-külön egyenlő többszöröse, ahányszorosa az egyik mennyiség az egyiknek, annyiszorosa az összes az összesnek.

Legyen a bárhány AB, CD mennyiség a velük számra nézve egyenlő (bárhány) e, f mennyiségnek különkülön egyenlő többszöröse. Azt mondom, hogy ahányszorosa AB az e-nek, annyiszorosa az AB, CD az e, f-nek.



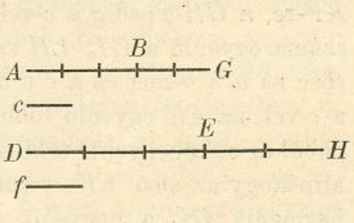
Minthogy egyenlő többszöröse az AB az e-nek és a CD az f-nek, az AB mennyiségben annyi egyenlő e van, mint a CD-ben egyenlő f. Osszuk fel az AB-t az e mennyiséggel egyenlő AG-re, GB-re, a CD-t pedig az f-fel egyenlő CH-ra, HD-re. Igy az AG, GB száma egyenlő a CH, HD számával. És minthogy AG egyenlő e-vel, CH pedig f-fel, AG egyenlő e-vel és AG, CH annyi, mint e, f. Ugyanebből az okból GB egyenlő e-vel és GB, HD annyi, mint e, f. Tehát ahány egyenlő e van az AB-ben, annyi egyenlő e, f van az AB, CD-ben. Tehát ahányszorosa AB az e-nek, annyiszorosa AB, CD is az e, f-nek.

Ha tehát bárhány mennyiség velük számra nézve egyenlő (bárhány) mennyiségnek külön-külön egyenlő többszöröse, ahányszorosa az egyik mennyiség az egyiknek, annyiszorosa az összes az összesnek. Ezt kellett bebizonyítanunk.

2.

Ha az első (mennyiség) a másodiknak egyenlő többszöröse és a harmadik a negyediknek, az ötödik pedig a másodiknak egyenlő többszöröse és a hatodik a negyediknek, az első meg az ötödik összege is a másodiknak egyenlő többszöröse és a harmadik meg a hatodik (összege) a negyediknek.

Mert legyen az első AB a második c-nek egyenlő többszöröse és a harmadik DE a negyedik f-nek és legyen az ötödik BG a második c-nek egyenlő többszöröse és a hatodik EH a negyedik f-nek. Azt mondom, hogy az első meg az ötödik összege AG a második c-nek egyenlő többszöröse és a harmadik meg a hatodik (összege) DH a negyedik f-nek.



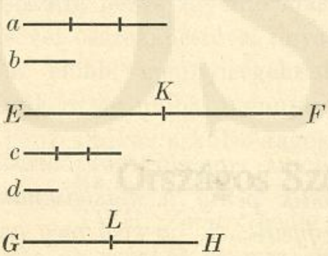
Minthogy egyenlő többszöröse az AB a c-nek és a DE az f-nek, az AB-ben annyi egyenlő c van, mint a DE-ben egyenlő f.

Ugyanebből az okból a BG-ben annyi egyenlő c van, mint az EH-ban egyenlő f. Tehát az egész AG-ben annyi egyenlő c van, mint az egész DH-ban egyenlő f. Ahányszorosa tehát az AG a c-nek, annyiszorosa a DH az f-nek. És így tehát az első meg az ötödik öszszege AG a második c-nek egyenlő többszöröse és a harmadik meg a hatodik (összege) DH a negyedik f-nek.

Ha tehát az első a másodiknak egyenlő többszöröse és a harmadik a negyediknek, az ötödik pedig a másodiknak egyenlő többszöröse és a hatodik a negyediknek, az első meg az ötödik összege is a másodiknak egyenlő többszöröse és a harmadik meg a hatodik (összege) a negyediknek. Ezt kellett bebizonyítanunk.

3.

Ha az első (mennyiség) a másodiknak egyenlő többszöröse és a harmadik a negyediknek és felvesszük az első és a harmadik egyenlő többszöröseit, a felvett többszörösök külön-külön egyenlő többszörösei a másodiknak és a negyediknek.



Mert legyen az első a a második b-nek egyenlő többszöröse és a harmadik c a negyedik d-nek és vegyük fel az a, c egyenlő többszöröseit EF-et, GH-t. Azt mondom, hogy az EF a b-nek és a GH a d-nek egyenlő többszöröse.

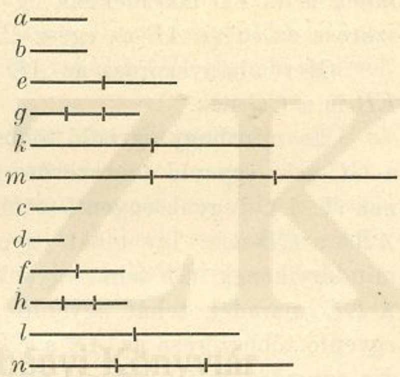
Minthogy egyenlő többszöröse az EF az a-nak és a GH a c-nek, az EF-ben annyi egyenlő a van, mint a GH-ban egyenlő c. Osszuk fel az EF-et az a mennyiséggel egyenlő EK-ra, KF-re, a GH-t pedig a c-vel egyenlő GL-re, LH-ra. Igy az EK, KF száma egyenlő a GL, LH számával. És minthogy egyenlő többszöröse az a a b-nek és a c a d-nek, EK pedig egyenlő az a-val és GL a c-vel, az EK egyenlő többszöröse a b-nek és a GL a d-nek. Ugyanebből az okból egyenlő többszöröse a KF a b-nek és az LH a d-nek. Minthogy az első EK a második b-nek egyenlő többszöröse és a harmadik GL a negyedik d-nek, az ötödik KF pedig a második b-nek egyenlő többszöröse és a hatodik LH a negyedik d-nek, az első meg az ötödik összege EF a második b-nek egyenlő többszöröse és a harmadik meg a hatodik (összege) GH a negyedik d-nek (V. 2.).

Ha tehát az első a másodiknak egyenlő többszöröse és a harmadik a negyediknek és felvesszük az első és a harmadik egyenlő többszöröseit, a felvett többszörösök külön-külön egyenlő többszörösei a másodiknak és a negyediknek. Ezt kellett bebizonyítanunk.

4.

Ha az első (mennyiség) a másodikkal ugyanabban az arányban van, mint a harmadik a negyedikkel, az elsőnek és a harmadiknak egyenlő többszörösei is a másodiknak és a negyediknek egyenlő többszöröseivel bármely többszörösök szerint ugyanabban az arányban vannak a felvett sorrendben.

Mert legyen az első a a második b-hez ugyanabban az arányban, mint a harmadik c a negyedik d-hez és vegyük fel az a, c egyenlő e, f többszöröseit, a b-nek, d-nek pedig más, tetszőleges egyenlő g, h többszöröseit. Azt mondom, hogy az e úgy aránylik a g-hez, mint az f a h-hoz.



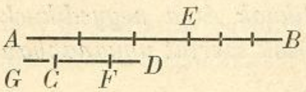
Most vegyük fel az e, f egyenlő k, l többszöröseit, a g-nek, h-nak pedig más, tetszőleges egyenlő m, n többszöröseit.

Minthogy egyenlő többszöröse az e az a-nak, az f pedig a c-nek és az e, f felvett egyenlő többszörösei k, l, a k egyenlő többszöröse az a-nak és az l a c-nek (V. 3.). Ugyanebből az okból egyenlő többszöröse az m a b-nek és az n a d-nek. És minthogy az a úgy aránylik a b-hez, mint a c a d-hez és az a, c felvett egyenlő többszörösei k, l, b-nek, d-nek pedig más, tetszőleges többszörösei m, n, az l meghaladja az n-et, ha a k meghaladja az m-et, egyenlő, ha az egyenlő és kisebb, ha az kisebb (V. V. def.). És k, l az e, f egyenlő többszörösei, m, n pedig a g, h más, tetszőleges egyenlő többszörösei. Az e tehát úgy aránylik a g-hez, mint az f a h-hoz.

Ha tehát az első a másodikkal ugyanabban az arányban van, mint a harmadik a negyedikkel, az elsőnek és a harmadiknak egyenlő többszörösei is a másodiknak és a negyediknek egyenlő többszöröseivel ugyanabban az arányban vannak bármely többszörösök szerint a felvett sorrendben. Ezt kellett bebizonyítanunk.

5.

Ha egy mennyiség egy (másik) mennyiségnek ugyanannyiszoros többszöröse, mint (az első) része a (másik) részének, a maradék is a maradéknak ugyanannyiszoros többszöröse, ahányszorosa az egész az egésznek.



Mert legyen az AB mennyiség a CD mennyiségnek ugyanannyiszoros többszöröse, mint az AE rész a CF résznek. Azt mondom, hogy az EB maradék is az FD maradéknak ugyanannyiszoros többszöröse, ahányszorosa az egész AB az egész CD-nek.

Mert ahányszorosa az AE a CF-nek, annyiszorosa legyen az EB is a CG-nek.

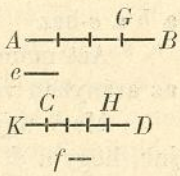
És minthogy egyenlő többszöröse az AE a CF-nek és az EB a GC-nek, egyenlő többszöröse az AE a CF-nek és az AB a GF-nek (V. 1.). Tegyük egyenlő többszörösévé az AE-t a CF-nek és az AB-t a CD-nek. Így tehát egyenlő többszöröse az AB a GF, CD mindegyikének. GF tehát egyenlő CD-vel. Vonjuk le a közös CF-et. A GC maradék tehát egyenlő az FD maradékkal. És minthogy egyenlő többszöröse az AE a CF-nek és az EB a GC-nek, GC pedig egyenlő DF-fel, egyenlő többszöröse az AE a CF-nek és az EB az FD-nek. Feltesszük pedig, hogy egyenlő többszöröse az AE a CF-nek és az AB a CD-nek. Egyenlő többszöröse tehát az EB az FD-nek és az AB a CD-nek. És így az EB maradék is az FD maradék ugyanannyiszoros többszöröse, ahányszorosa az egész AB az egész CD-nek.

Ha tehát egy mennyiség egy mennyiségnek ugyanannyiszoros többszöröse, mint a része a részének, a maradék is a maradéknak ugyanannyiszoros többszöröse, ahányszorosa az egész az egésznek. Ezt kellett bebizonyítanunk.

6.

Ha két mennyiség két mennyiségnek egyenlő többszöröse és részeik is ugyanazoknak egyenlő többszörösei, maradékaik is ugyanazoknak egyenlő többszörösei.

Mert legyen a két AB, CD mennyiség a két e, f mennyiség egyenlő többszöröse és azoknak AG, CH részeik is legyenek az e, f egyenlő többszörösei. Azt mondom, hogy a GB, HD maradékok is az e, f egyenlő többszörösei.



Mert legyen először a GB egyenlő az e-vel. Azt mondom, hogy a HD az f-fel egyenlő.

Tegyük az f-fel egyenlővé a CK-t. Minthogy egyenlő többszöröse az AG az e-nek és a CH az f-nek, GB pedig egyenlő az e-vel és KC az f-fel, egyenlő többszöröse az AB az e-nek és a KH az f-nek (V. 2.). Feltesszük pedig, hogy egyenlő többszöröse az AB az e-nek és a CD az f-nek. Egyenlő többszöröse tehát a KH az f-nek és a CD az f-nek. És minthogy a KH, CD mindegyike az f egyenlő többszöröse, a KH egyenlő a CD-vel. Vonjuk ki a közös CH-t. A KC maradék tehát egyenlő a HD maradékkal. De az f egyenlő a KC-vel. Igy tehát a HD is egyenlő az f-fel. Ha tehát a GB egyenlő az e-vel, a HD egyenlő az f-fel.

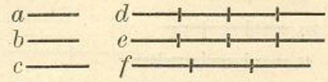
Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy, ha többszöröse a GB az e-nek, ugyanannyiszorosa a HD az f-nek.

Ha tehát két mennyiség két mennyiségnek egyenlő többszöröse és részeik is ugyanazoknak egyenlő többszörösei, maradékaik is ugyanazoknak egyenlő többszörösei. Ezt kellett elvégeznünk.

7.

Egyenlők ugyanazzal (a másikkal) ugyanabban az arányban vannak és ugyanaz (a másik) az egyenlőkkel.

Legyenek az egyenlő mennyiségek a, b, a másik, tetszőleges mennyiség c. Azt mondom, hogy az a, b mindegyike a c-vel ugyanabban az arányban van és a c az a, b mindegyikével.



Mert vegyük fel az a, b egyenlő többszöröseit, d-t, e-t, a c-nek pedig más, tetszőleges többszörösét, f-et.

Minthogy egyenlő többszöröse a d az a-nak és az e a b-nek, a pedig egyenlő b-vel, a d egyenlő az e-vel. Más, tetszőleges pedig az f. Ha tehát a d meghaladja az f-et, az e is meghaladja az f-et, ha az egyenlő vele, ez is egyenlő vele és ha az kisebb nála, ez is kisebb nála. És a d, e az a, b egyenlő többszöröse, az f pedig a c-nek más, tetszőleges többszöröse. Az a tehát úgy aránylik a c-hez, mint a b a c-hez.

Azt mondom, hogy a c is az a, b mindegyikével ugyanabban az arányban van.

Mert ugyanezeket összehasonlítva, hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a d egyenlő az e-vel. Az f pedig más. Ha tehát az f meghaladja a d-t, meghaladja az e-t is, ha egyenlő azzal, egyenlő ezzel is és ha kisebb annál, kisebb ennél is. És az f a c többszöröse, a d, e pedig az a, b más, tetszőleges egyenlő többszöröse. Tehát a c úgy aránylik az a-hoz, mint a c a b-hez.

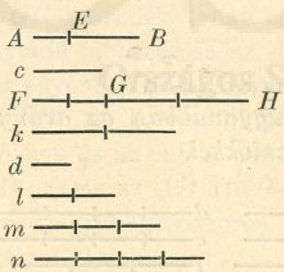
Egyenlők tehát ugyanazzal ugyanabban az arányban vannak és ugyanaz az egyenlőkkel.

Porizma (következmény).

Ebből kitünik, hogy ha mennyiségek arányosak, megfordítottan is arányosak. — Ezt kellett bebizonyítanunk.

8.

Nem egyenlő mennyiségek közül a nagyobbik ugyanazzal nagyobb arányban van, mint a kisebbik és ugyanaz a kisebbikkel nagyobb arányban van, mint a nagyobbikkal.



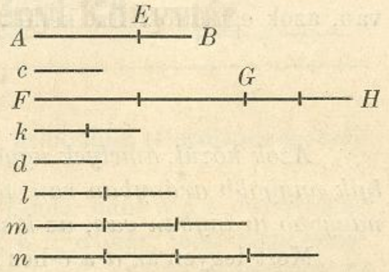
Legyenek a nem egyenlő mennyiségek AB, c és legyen a nagyobbik az AB, a másik tetszőleges pedig a d. Azt mondom, hogy az AB a d-vel nagyobb arányban van, mint a c a d-vel és a d a c-vel nagyobb arányban van, mint az AB-vel.

Minthogy nagyobb az AB a c-nél, tegyük egyenlővé c-vel BE-t. Igy az AE, EB kisebbikének többszöröse valamikor a d-nél nagyobb lesz (V. IV. def.). Legyen először az AE kisebb az EB-nél; szorozzuk meg az AE-t és legyen ennek FG többszöröse nagyobb a d-nél és ahányszorosa az FG az AE-nek, annyiszorosa legyen a GH az EB-nek, a k pedig a c-nek. Vegyük fel a d kétszeresének az l-et, háromszorosának pedig az m-et s így tovább, mindig egygyel emelkedve a d többszörösei az elsőig, mely nagyobb a k-nál. Vegyük ezt fel és legyen n a d négyszerese, az első, mely nagyobb a k-nál.

Minthogy a k az első n-nél kisebb, a k az m-nél nem kisebb. És minthogy egyenlő többszöröse az FG az AE-nek és a GH az EB-nek, egyenlő többszöröse az FG az AE-nek és az FH az AB-nek (V. 1.). Egyenlő többszöröse pedig az FG az AE-nek és a k a c-nek. Egyenlő többszöröse tehát az FH az AB-nek és a k a c-nek. Az FH, k tehát az AB, c egyenlő többszörösei. Viszont, minthogy egyenlő többszöröse a GH az EB-nek és a k a c-nek, az EB pedig egyenlő a c-vel, a GH egyenlő a k-val. A k pedig az m-nél nem kisebb. Igy tehát a GH sem kisebb az m-nél. Az FG pedig nagyobb a d-nél. Tehát az egész FH nagyobb a d, m összegénél. De a d, m összege az n-nel egyenlő, minthogy az m a d háromszorosa, az m és d összege pedig a d négyszerese, az n pedig szintén a d négyszerese. Az m, d összege tehát egyenlő az n-nel. De az FH nagyobb, mint az m, d. Az FH tehát az n-et meghaladja. A k pedig az n-et nem haladja meg. És az FH, k az AB, c egyenlő többszörösei, az n pedig a d-nek más, tetszőleges többszöröse. Az AB tehát a d-vel nagyobb arányban van, mint a c a d-vel.

Azt mondom, hogy a d a c-vel nagyobb arányban van, mint a d az AB-vel.

Mert ugyanezeket összehasonlítva hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az n a k-t meghaladja, az n az FH-t pedig meg nem haladja. És az n a d többszöröse, az FH, k pedig az AB, c más, tetszőleges egyenlő többszöröse. A d tehát a c-vel nagyobb arányban van, mint a d az AB-vel.



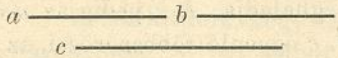
Legyen az AE azonban az EB-nél nagyobb. Igy a kisebbik EB többszöröse valamikor a d-nél nagyobb lesz (V. IV. def.). Szorozzuk meg és legyen a GH többszöröse az EB-nek és nagyobb a d-nél. És a hányszorosa a GH az EB-nek, annyiszorosa legyen az FG az AE-nek, a k pedig a c-nek. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az FH, k az AB, c egyenlő többszörösei. És hasonlóképen vegyük fel n-net, a d többszörösét mint az elsőt, mely nagyobb az FG-nél. Ennélfogva viszont az FG az m-nél nem kisebb. Nagyobb pedig a GH a d-nél. Tehát az egész FH a d-t, m-et, vagyis az n-et, meghaladja. A k pedig az n-et meg nem haladja, minthogy FG nagyobb a GH-nál vagyis a k az n-et meg nem haladja. És hasonló módon, mint előbb, fejezzük be a bizonyítást.

Nem egyenlő mennyiségek közül tehát a nagyobbik ugyanazzal nagyobb arányban van, mint a kisebbik. És ugyanaz a kisebbikkel nagyobb arányban van, mint a nagyobbikkal. Ezt kellett bebizonyítanunk.

9.

Amik ugyanazzal ugyanabban az arányban vannak, egyenlők egymással. És amikkel ugyanaz ugyanabban az arányban van, azok egyenlők.

Mert legyen az a, b mindegyike a c-vel ugyanabban az arányban. Azt mondom, hogy az a egyenlő a b-vel.



Mert ha nem az, az a, b mindegyike c-vel nem lehet ugyanabban az arányban (V. 8.). Pedig abban van. Az a tehát egyenlő a b-vel.

Legyen viszont a c az a, b mindegyikével ugyanabban az arányban. Azt mondom, hogy az a egyenlő a b-vel.

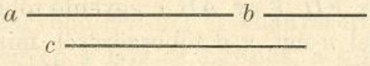
Mert ha nem, a c az a. b mindegyikével nem lehet ugyanabban az arányban (V. 8.). Pedig abban van. Az a tehát egyenlő a b-vel.

Amik tehát ugyanazzal ugyanabban az arányban vannak, egyenlők egymással. És amikkel ugyanaz ugyanabban az arányban van, azok egyenlők. Ezt kellett bebizonyítanunk.

10.

Azok közül, amelyek ugyanazzal arányban vannak, az, amelyik nagyobb arányban van, nagyobb. Amelyikkel pedig ugyanaz nagyobb arányban van, az kisebb.

Mert legyen az a a c-hez nagyobb arányban, mint a b a c-hez. Azt mondom, hogy nagyobb az a a b-nél.



Mert ha nem az, vagy egyenlő az a a b-vel vagy kisebb nála. De az a nem egyenlő a b-vel. Mert az a, b mindegyike a c-vel ugyanabban az arányban lenne (V. 7.). Pedig nincs abban. Tehát az a nem egyenlő a b-vel. De az a kisebb sem a b-nél. Mert az a a c-vel kisebb arányban lenne, mint a b a c-vel (V. 8.). Pedig nincs abban. Tehát az a nem kisebb a b-nél. Bebizonyítottuk pedig, hogy egyenlő sem vele. Nagyobb tehát az a a b-nél.

Legyen viszont a c a b-vel nagyobb arányban, mint a c az a-val. Azt mondom, hogy kisebb a b az a-nál.

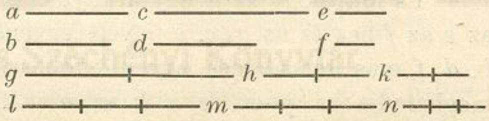
Mert ha nem az, vagy egyenlő vele vagy nagyobb nála. De az a nem egyenlő a b-vel. Mert a c az a, b mindegyikével ugyanabban az arányban lenne (V. 7.). Pedig nincs abban. Tehát az a nem egyenlő a b-vel. De a b nagyobb sem az a-nál. Mert a c a b-vel kisebb arányban lenne, mint az a-val (V. 8.). Pedig nincs abban. Tehát a b nem nagyobb az a-nál. Bebizonyítottuk pedig, hogy egyenlő sem vele. Kisebb tehát a b az a-nál.

Tehát azok közül, amelyek ugyanazzal arányban vannak, az, amelyik nagyobb arányban van, nagyobb. És amelyikkel ugyanaz nagyobb arányban van, az kisebb. Ezt kellett bebizonyítanunk.

11.

Amik ugyanabban az arányban vannak ugyanazokkal, egymással is ugyanabban (az arányban) vannak.

Mert legyen az a a b-hez, mint a c a d-hez, a c pedig a d-hez, mint az e az f-hez. Azt mondom, hogy az a úgy van a b-hez, mint az e az f-hez.



Mert vegyük fel az a, c, e egyenlő többszöröseit, g-t, h-t, k-t, a b-nek, d-nek, f-nek pedig más, tetszőleges egyenlő többszöröseit, l-et, m-et, n-et.

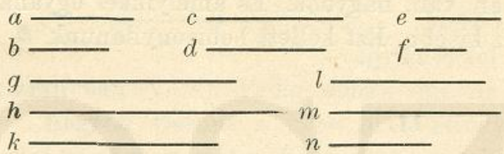
És minthogy az a úgy van a b-hez, mint a c a d-hez és az a, c felvett egyenlő többszörösei g, h, a b, d más, tetszőleges többszörösei pedig l, m, a h meghaladja az m-et, ha a g meghaladja az l-et, egyenlő vele, ha ez egyenlő ezzel és kisebb nála, ha ez kisebb ennél (V. V. def.). Viszont, minthogy a c úgy van a d-hez, mint az e az f-hez és a c, e felvett egyenlő többszörösei h, k, a d, f más, tetszőleges többszörösei pedig m, n, a k meghaladja az n-et, ha a h meghaladja az m-et, egyenlő vele, ha ez egyenlő ezzel és kisebb nála, ha ez kisebb ennél. De ha a h meghaladja az m-et, a g is meghaladja az l-et, egyenlő vele, ha ez egyenlő ezzel és kisebb nála, ha ez kisebb ennél. Ennélfogva, ha a h meghaladja az l-et, a k is meghaladja az n-et, egyenlő vele, ha ez egyenlő ezzel és kisebb nála, ha ez kisebb ennél. És g, k az a, e, egyenlő többszörösei, l, n pedig a b, f más, tetszőleges egyenlő többszörösei. Az a tehát úgy van a b-hez, mint az e az f-hez.

Amik tehát ugyanabban az arányban vannak ugyanazokkal, egymással is ugyanabban (az arányban) vannak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

12.

Ha bárhány mennyiség arányos, akkor, miképen az előtagok egyike az utótagok egyikéhez, úgy vannak az összes előtagok az összes utótagokhoz.

Legyen a bárhány arányos mennyiség a, b, c, d, e, f, úgy hogy az a úgy aránylik a b-hez, mint a c a d-hez és az e az f-hez. Azt mondom, hogy miképen az a a b-hez, úgy van a, c, e a b, d, f-hez.



Mert vegyük fel az a, c, e egyenlő többszöröseit g-t, h-t, k-t, a b-nek, d-nek, f-nek pedig más, tetszőleges egyenlő többszöröseit, l-et, m-et, n-et.

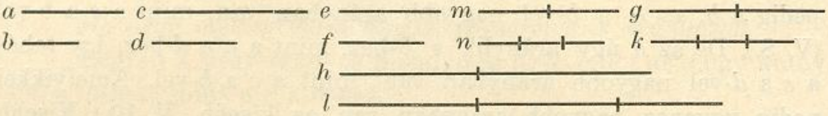
És minthogy az a úgy aránylik a b-hez, mint a c a d-hez és az e az f-hez és az a, c, e felvett egyenlő többszörösei a g, h, k, a b, d, f más, tetszőleges egyenlő többszörösei pedig az l, m, n, a h meghaladja az m-et és a k az n-et, ha a g meghaladja az l-et, egyenlő vele, ha ez egyenlő ezzel és kisebb nála, ha ez kisebb ennél (V. V. def.). Ennélfogva, ha a g meghaladja az l-et, a g, h, k meghaladja az l, m, n-et, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál. És a g meg a g, h, k az a-nak meg az a, c, e-nek egyenlő többszörösei, ennélfogva ha bárhány mennyiség velük számra nézve egyenlő bárhány mennyiségnek külön-külön egyenlő többszöröse, ahányszorosa az egyik mennyiség az egyiknek, annyiszorosa az összes az összesnek (V. 1.). Ugyanebből az okból az l meg az l, m, n a b-nek meg a b, d, f-nek egyenlő többszöröse. Tehát az a úgy aránylik a b-hez, mint az a, c, e a b, d, f-hez.

Ha tehát bárhány mennyiség arányos, akkor, miképen az előtagok egyike az utótagok egyikéhez, úgy vannak az összes előtagok az összes utótagokhoz. Ezt kellett bebizonyítanunk.

13.

Ha az első a másodikkal ugyanabban az arányban van és a harmadik a negyedikkel, a harmadik pedig a negyedikkel nagyobb arányban van, mint az ötödik a hatodikkal, az első a másodikkal is nagyobb arányban van, mint az ötödik a hatodikkal.

Mert legyen az első a a második b-vel ugyanabban az arányban és a harmadik c a negyedik d-vel, a harmadik c pedig legyen a negyedik d-vel nagyobb arányban, mint az ötödik e a hatodik f-fel. Azt mondom, hogy az első a a második b-vel is nagyobb arányban van, mint az ötödik e a hatodik f-fel.



Minthogy vannak a c-nek, e-nek egyenlő többszörösei, a d-nek, f-nek pedig más, tetszőleges egyenlő többszörösei és a c többszöröse a d többszörösét meghaladja, az e többszöröse pedig az f többszörösét meg nem haladja, vegyük fel ezeket és legyenek a c, e egyenlő többszörösei g, h a d, f más, tetszőleges többszörösei pedig k, l, úgy, hogy a g a k-t meghaladja, a h pedig az l-et meg nem haladja. És ahányszorosa a g a c-nek, annyiszorosa legyen az m az a-nak, ahányszorosa pedig a k a d-nek, annyiszorosa legyen az n a b-nek.

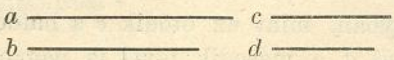
És minthogy az a úgy aránylik a b-hez, mint a c a d-hez és az a, c felvett egyenlő többszörösei m, g, a b, d más, tetszőleges egyenlő többszörösei pedig n, k, az m meghaladja az n-et, ha a g meghaladja a k-t, egyenlő vele, ha ez egyenlő ezzel és kisebb nála, ha ez kisebb ennél (V. V. def.). A g pedig meghaladja a k-t. Az m tehát meghaladja az n-et. A h pedig nem haladja meg az l-et. És az m, h az a, e egyenlő többszörösei, az n, l pedig a b, f más, tetszőleges egyenlő többszörösei. Az a tehát a b-vel nagyobb arányban van, mint az e az f-fel.

Ha tehát az első a másodikkal ugyanabban az arányban van és a harmadik a negyedikkel, a harmadik pedig a negyedikkel nagyobb arányban van, mint az ötödik a hatodikkal, az első a másodikkal is nagyobb arányban van, mint az ötödik a hatodikkal. Ezt kellett bebizonyítanunk.

14.

Ha az első a másodikkal ugyanabban az arányban van és a harmadik a negyedikkel, az első pedig a harmadiknál nagyobb, a második is a negyediknél nagyobb, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál.

Mert legyen az első a a második b-vel ugyanabban az arányban és a harmadik c a negyedik d-vel, az a pedig nagyobb a c-nél. Azt mondom, hogy a b is nagyobb a d-nél.



Minthogy az a a c-nél nagyobb, más, tetszőleges (mennyiség) pedig a b, az a a b-vel nagyobb arányban van, mint a c a b-vel (V. 8.). De az a úgy aránylik a b-hez, mint a c a d-hez. Igy tehát a c a d-vel nagyobb arányban van, mint a c a b-vel. Amelyikkel pedig ugyanaz nagyobb arányban van, az kisebb (V. 10.). Kisebb tehát a d a b-nél. Ennélfogva nagyobb a b a d-nél.

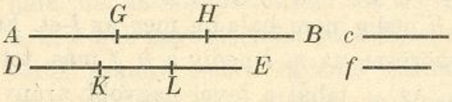
Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogyha az a egyenlő a c-vel, a b is egyenlő a d-vel és ha az a kisebb a c-nél, a b is kisebb a d-nél.

Ha tehát az első a másodikkal ugyanabban az arányban van és a harmadik a negyedikkel, az első pedig a harmadiknál nagyobb, a második is a negyediknél nagyobb, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál. Ezt kellett bebizonyítanunk.

15.

A részek ugyanannyiszoros többszöröseikkel ugyanabban az arányban vannak a felvett sorrendben.

Legyen egyenlő többszöröse az AB a c-nek és a DE az f-nek. Azt mondom, hogy a c úgy aránylik az f-hez, mint az AB a DE-hez.



Minthogy egyenlő többszöröse az AB a c-nek és a DE az f-nek, az AB mennyiségben annyi egyenlő c van, ahány egyenlő f van a DE-ben. Osszuk fel az AB-t a c-vel egyenlő AG-re, GH-ra, HB-re, a DE-t pedig az f-fel egyenlő DK-ra, KL-re, LE-re. Az AG, GH, HB száma tehát egyenlő a DK, KL, LE számával. És minthogy AG, GH, HB egyenlők egymással, DK, KL, LE pedig szintén egyenlők egymással, az AG úgy aránylik a DK-hoz, mint a GH a KL-hez és a HB az LE-hez (V. 7.). De miképen az előtagok egyike az utótagok egyikéhez, úgy vannak az összes előtagok az összes utótagokhoz (V. 12.). Tehát miképen az AG a DK-hoz, úgy aránylik az AB a DE-hez. Az AG pedig egyenlő a c-vel, a DK pedig az f-fel. A c tehát úgy aránylik az f-hez, mint az AB a DE-hez.

Tehát a részek ugyanannyiszoros többszöröseikkel ugyanabban az arányban vannak a felvett sorrendben. Ezt kellett bebizonyítanunk.

16.

Ha négy mennyiség arányos, felcserélve is arányosak.

Legyen a négy arányos mennyiség a, b, c, d; az a úgy aránylik a b-hez, mint a c a d-hez. Azt mondom, hogy felcserélve is arányosak; az a úgy aránylik a c-hez, mint a b a d-hez.

Mert vegyük fel az a, b egyenlő többszöröseit, e-t, f-et, a c-nek, d-nek pedig más, tetszőleges egyenlő többszöröseit g-t, h-t.

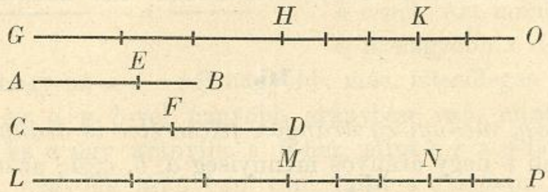
És minthogy egyenlő többszöröse az e az a-nak és az f a b-nek, a részek pedig ugyanannyiszoros többszöröseikkel ugyanabban az arányban vannak (V. 15.), az a úgy aránylik a b-hez, mint az e az f-hez. Az a pedig úgy aránylik a b-hez, mint a c a d-hez. Tehát a c úgy aránylik a d-hez, mint az e az f-hez (V. 11.). Viszont, minthogy g, h a c, d egyenlő többszörösei, a c úgy aránylik a d-hez, mint a g a h-hoz (V. 15.). A c pedig úgy aránylik a d-hez, mint az e az f-hez. Tehát az e úgy aránylik az f-hez, mint a g a h-hoz (V. 11.). Ha pedig négy mennyiség arányos és az első a másodiknál nagyobb, a második is a negyediknél nagyobb, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál (V. 14.). Ha tehát az e meghaladja a g-t, az f is meghaladja a h-t, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál. És e, f az a, b egyenlő többszörösei, g, h pedig a c-nek, d-nek más, tetszőleges egyenlő többszörösei. Az a tehát úgy aránylik a c-hez, mint a b a d-hez.

Ha tehát negy mennyiség arányos, felcserélve is arányosak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

17.

Ha összetett mennyiségek arányosak, a szétbontottak is arányosak.

Legyenek az arányos összetett mennyiségek AB, BE, CD, DF; az AB úgy aránylik a BE-hez, mint a CD a DF-hez. Azt mondom, hogy a szétbontottak is arányosak, az AE úgy aránylik az EB-hez, mint a CF a DF-hez.



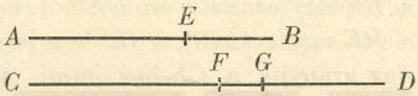
Mert vegyük fel az AE, EB, CF, FD egyenlő többszöröseit, GH-t, HK-t, LM-et, MN-et, az EB-nek, FD-nek pedig más, tetszőleges egyenlő többszöröseit, KO-t, NP-t.

Minthogy egyenlő többszöröse a GH az AE-nek és a HK az EB-nek, egyenlő többszöröse a GH az AE-nek és a GK az AB-nek (V. 1.). De egyenlő többszöröse a GH az AE-nek és az LM a CF-nek. Egyenlő többszöröse tehát a GK az AB-nek és az LM a CF-nek. Viszont, minthogy egyenlő többszöröse az LM a CF-nek és az MN az FD-nek, egyenlő többszöröse az LM a CF-nek és az LN a CD-nek (V. 1.). De egyenlő többszöröse az LM a CF-nek és a GK az AB-nek. Egyenlő többszöröse tehát a GK az AB-nek és az LN a CD-nek. A GK, LN tehát az AB, CD egyenlő többszörösei. Viszont, minthogy egyenlő többszöröse a HK az EB-nek és az MN az FD-nek, a KO pedig az EB egyenlő többszöröse és az NP az FD-é, az összetett HO is az EB egyenlő többszöröse és az MP az FD-é (V. 2.). És minthogy az AB úgy aránylik a BE-hez, mint a CD a DF-hez és az AB, CD felvett egyenlő többszörösei GK, LN, az EB-nek, FD-nek pedig egyenlő többszörösei HO, MP, az LN meghaladja az MP-t, ha a GK meghaladja a HO-t, egyenlő vele, ha ez egyenlő ezzel és kisebb nála, ha ez kisebb ennél (V. V. def.). A GK pedig meghaladja a HO-t és a közös HK kivonva, a GH meghaladja a KO-t. De ha a GK meghaladja a HO-t, az LN meghaladja az MP-t. Az LN tehát meghaladja az MP-t és a közös MN kivonva, az LM meghaladja az NP-t. Ennélfogva, ha a GH meghaladja a KO-t, az LM meghaladja az NP-t. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogyha a GH egyenlő a KO-val, az LM is egyenlő az NP-vel és ha kisebb nála, ez is kisebb ennél. És GH, LM az AE, CF egyenlő többszörösei, KO, NP pedig az EB, FD más, tetszőleges egyenlő többszörösei. Az AE tehát úgy aránylik az EB-hez, mint a CF az FD-hez.

Ha tehát összetett mennyiségek arányosak, a szétbontottak is arányosak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

18.

Ha szétbontott mennyiségek arányosak, az összetettek is arányosak.



Legyenek az arányos szétbontott mennyiségek AE, EB, CF, FD; az AE úgy aránylik az EB-hez, mint a CF az FD-hez. Azt mondom, hogy az összetettek is arányosak, az AB úgy aránylik a BE-hez, mint a CD az FD-hez.

Mert ha az AB nem aránylik úgy a BE-hez, mint a CD a DF-hez, akkor az AB úgy aránylik a BE-hez, mint a CD a DF-nél kisebbhez vagy nagyobbhoz.

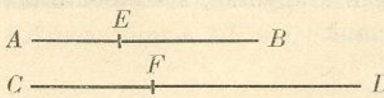
Legyen először a kisebbhez, a DG-hez (arányban). Minthogy az AB úgy aránylik a BE-hez, mint a CD a DG-hez, az összetett mennyiségek arányosak. Ennélfogva a szétbontottak is arányosak (V. 17.). Tehát az AE úgy aránylik az EB-hez, mint a CG a GD-hez. Feltettük pedig, hogy az AE úgy aránylik az EB-hez, mint a CF az FD-hez. Ennélfogva a CG is úgy aránylik a GD-hez, mint a CF az FD-hez. Az első CG pedig nagyobb a harmadik CF-nél. Tehát a második GD is nagyobb a negyedik FD-nél (V. 14.). Azonban kisebb. Ez pedig lehetetlen. Tehát az AB nem úgy aránylik a BE-hez, mint a CD az FD-nél kisebbhez. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a nagyobbhoz sem. Tehát ugyanahhoz.

Ha tehát szétbontott mennyiségek arányosak, az összetettek is arányosak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

19.

Ha az egész úgy aránylik az egészhez, mint a rész a részhez, a maradék is úgy aránylik a maradékhoz, mint az egész az egészhez.

Mert legyen az egész AB az egész CD-hez, mint az AE rész a CF részhez. Azt mondom, hogy az EB maradék is úgy van az FD maradékhoz, mint az egész AB az egész CD-hez.



Minthogy az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az AE a CF-hez, felcserélve is a BA úgy aránylik az AE-hez, mint a DC a CF-hez (V. 16.). És minthogy az összetett mennyiségek arányosak, a szétbontottak is arányosak (V. 17.), a BE úgy aránylik az EA-hoz, mint a DF a CF-hez. És felcserélve, a BE úgy aránylik a DF-hez, mint az EA az FC-hez. Az AE pedig úgy aránylik a CF-hez, mint, ahogyan felvettük, az egész AB az egész CD-hez. Tehát az EB maradék is úgy aránylik az FD maradékhoz, mint az egész AB az egész CD-hez.

Ha tehát az egész úgy aránylik az egészhez, mint a rész a részhez, a maradék is úgy aránylik a maradékhoz, mint az egész az egészhez. Ezt kellett bebizonyítanunk.

[És minthogy bebizonyítottuk, hogy az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az EB az FD-hez és felcserélve is az AB úgy aránylik az EB-hez, mint a CD az FD-hez, az összetett mennyiségek arányosak. Bebizonyítottuk pedig, hogy a BA úgy aránylik az AE-hez, mint a DC a CF-hez. És ez az eltolt (arány) (V. XVI. def.).]

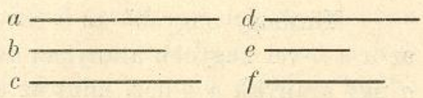
Porizma (következmény).

Ebből kitűnik, hogyha összetett mennyiségek arányosak, az eltóltak is arányosak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

20.

Ha három mennyiség és velük számra nézve egyenlő mások, kettesével összekapcsolva ugyanabban az arányban vannak, amelyben az első a harmadiknál nagyobb, a negyedik is a hatodiknál nagyobb, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál.

Legyen a három a, b, c mennyiség és a velük számra nézve



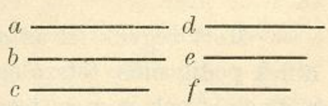
egyenlő más d, e, f, kettesével összekapcsolva ugyanabban az arányban; az a úgy aránylik a b-hez, mint a d az e-hez, a b pedig úgy a c-hez, mint az e az f-hez, amelyben nagyobb az a a c-nél. Azt mondom, hogy a d is az f-nél nagyobb, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál.

Minthogy nagyobb az a a c-nél, más (mennyiség) pedig a b, a nagyobbik pedig ugyanazzal nagyobb arányban van mint a kisebbikkel (V. 8.), az a a b-vel nagyobb arányban van, mint a c a b-vel. De az a úgy aránylik a b-hez, mint a d az e-hez, a c pedig a b-hez, mint megfordítva, az f az e-hez. A d tehát az e-vel nagyobb arányban van, mint az f az e-vel. Azok közül pedig, melyek ugyanazzal arányban vannak, az, amelyik nagyobb arányban van, nagyobb (V. 10.). Nagyobb tehát a d az f-nél. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogyha az a egyenlő a c-vel, a d is egyenlő az f-fel és ha az kisebb annál, ez is kisebb ennél.

Ha tehát három mennyiség és velük számra nézve egyenlő mások, kettesével összekapcsolva ugyanabban az arányban vannak, amelyben az első a harmadiknál nagyobb, a negyedik is a hatodiknál nagyobb, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál. Ezt kellett bebizonyítanunk.

21.

Ha három mennyiség és velük számra nézve egyenlő mások, kettesével összekapcsolva ugyanabban az arányban vannak, az arányosság pedig zavart, amelyben az első a harmadiknál nagyobb, a negyedik is a hatodiknál nagyobb, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál.



Legyen a három a, b, c mennyiség és a velük számra nézve egyenlő más d, e, f, kettesével összekapcsolva, ugyanabban az arányban, az arányosság pedig legyen zavart; az a úgy aránylik a b-hez, mint az e az f-hez, a b pedig úgy a c-hez, mint a d az e-hez, amelyben az a a c-nél nagyobb. Azt mondom, hogy a d is az f-nél nagyobb, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál.

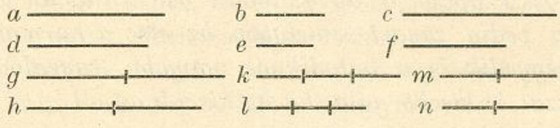
Minthogy nagyobb az a a c-nél, más (mennyiség) pedig a b, az a a b-vel nagyobb arányban van, mint a c a b-vel (V. 8.). De az a úgy aránylik a b-hez, mint az e az f-hez, a c pedig a b-hez, mint megfordítva, az e a d-hez. Az e tehát az f-fel nagyobb arányban van, mint az e a d-vel. Amelyikkel pedig ugyanaz nagyobb arányban van, az kisebb (V. 10.). Kisebb tehát az f a d-nél. Nagyobb tehát a d az f-nél. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogyha az a egyenlő a c-vel, a d is egyenlő az f-fel és ha az kisebb annál, ez is kisebb ennél.

Ha tehát három mennyiség és velük számra nézve egyenlő mások, kettesével összekapcsolva, ugyanabban az arányban vannak, az arányosság pedig zavart, amelyben az első a harmadiknál nagyobb, a negyedik is a hatodiknál nagyobb, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál. Ezt kellett bebizonyítanunk.

22.

Ha bárhány mennyiség és velük számra nézve egyenlő mások, kettesével összekapcsolva, ugyanabban az arányban vannak, az egyenlőség miatt is ugyanabban az arányban vannak.

Legyen a bárhány a, b, c mennyiség és a velük számra nézve egyenlő, más d, e, f, kettesénél összekapcsolva, ugyanabban az arányban; az a úgy aránylik a b-hez, mint a d az e-hez, a b pedig a c-hez, mint az e az f-hez. Azt mondom, hogy az egyenlőség miatt is ugyanabban az arányban vannak.



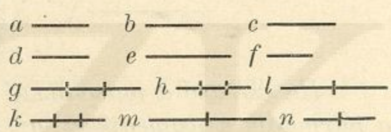
Mert vegyük fel az a, d egyenlő többszöröseit, g-t, h-t, a b-nek, e-nek pedig más, tetszőleges egyenlő többszöröseit, k-t, l-et, továbbá a c-nek, f-nek is más, tetszőleges többszöröseit, m-et, n-et.

Minthogy az a úgy aránylik a b-hez, mint a d az e-hez és az a, d felvett egyenlő többszörösei g, h, a b-nek, e-nek más, tetszőleges többszörösei pedig k, l, a g úgy aránylik a k-hoz, mint a h az l-hez (V. 4.). Ugyanebből az okból a k úgy aránylik az m-hez, mint az l az n-hez. Minthogy a három g, k, m mennyiség és a velük számra nézve egyenlő *h*, *l*, *n* kettesével összekapcsolva ugyanabban az arányban vannak, amelyben, ha a *g* meghaladja az *m*-et, a *h* is meghaladja az *n*-et, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál (V. 20.). És *g*, *h* az *a*, *d* egyenlő többszörösei, *m*, *n* pedig a *c*, *f* más, tetszőleges egyenlő többszörösei. Tehát az *a* úgy aránylik a *c*-hez, mint a *d* az *f*-hez.

Ha tehát bárhány mennyiség és velük számra nézve egyenlő mások, kettesével összekapcsolva, ugyanabban az arányban vannak, az egyenlőség miatt is ugyanabban az arányban vannak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

23.

Ha három mennyiség és velük számra nézve egyenlő mások, kettesével összekapcsolva, ugyanabban az arányban vannak, az arányosság pedig zavart, az egyenlőség miatt is ugyanabban az arányban vannak.



Legyen a három *a*, *b*, *c* mennyiség és a velük számra nézve egyenlő más *d*, *e*, *f* kettesével összekapcsolva, ugyanabban az arányban, az arányosság pedig zavart legyen; az *a* úgy aránylik a *b*-hez, mint az *e* az *f*-hez, a *b* pedig a *c*-hez, mint a *d* az *e*-hez. Azt mondom, hogy az *a* úgy aránylik a *c*-hez, mint a *d* az *f*-hez.

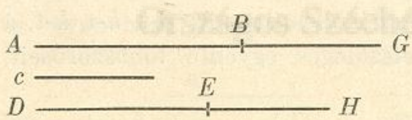
Vegyük fel az *a*, *b*, *d* egyenlő többszöröseit, *g*-t, *h*-t, *k*-t, a *c*-nek, *e*-nek, *f*-nek pedig más, tetszőleges egyenlő többszöröseit, *l*-et, *m*-et, *n*-et.

Minthogy egyenlő többszöröse a *g*, *h* az *a*-nak, *b*-nek, a részek pedig ugyanannyiszoros többszöröseikkel ugyanabban az arányban vannak (V. 15.), az *a* úgy aránylik a *b*-hez, mint a *g* a *h*-hoz. Ugyanebből az okból az *e* úgy aránylik az *f*-hez, mint az *m* az *n*-hez. És az *a* úgy aránylik a *b*-hez, mint az *e* az *f*-hez. Tehát a *g* úgy aránylik a *h*-hoz, mint az *m* az *n*-hez. És minthogy a *b* úgy aránylik a *c*-hez, mint a *d* az *e*-hez, felcserélve is, a *b* a *d*-hez, mint a *c* az *e*-hez (V. 16.). És minthogy *h*, *k* a *b*, *d* egyenlő többszörösei, a részek pedig egyenlő többszöröseikkel ugyanabban az arányban vannak, a *b* úgy aránylik a *d*-hez, mint a *h* a *k*-hoz. De a *b* úgy aránylik a *d*-hez, mint a *c* az *e*-hez. Tehát a *h* úgy aránylik a *k*-hoz, mint a *c* az *e*-hez. Viszont, minthogy *l*, *m* a *c*, *e* egyenlő többszörösei, a c úgy aránylik az e-hez, mint az l az m-hez. De a c úgy aránylik az e-hez, mint a h a k-hoz. Tehát a h úgy aránylik a k-hoz, mint az l az m-hez és felcserélve is, a h az l-hez, mint a k az m-hez. Bebizonyítottuk pedig, hogy a g úgy aránylik a h-hoz, mint az m az n-hez. Minthogy a három g, h, l mennyiség és a velük számra nézve egyenlő, más k, m, n kettesével összekapcsolva, ugyanabban az arányban vannak és az arányosság zavart, amelyben, ha a g meghaladja az l-et, a k is meghaladja az n-et, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál (V. 21.). És g, k az a, d egyenlő többszörösei, l, n pedig a c-é, f-é. Az a tehát úgy aránylik a c-hez, mint a d az f-hez.

Ha tehát három mennyiség és velük számra nézve egyenlő mások, kettesével összekapcsolva, ugyanabban az arányban vannak, az arányosság pedig zavart, az egyenlőség miatt is ugyanabban az arányban vannak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

24.

Ha az első a másodikkal ugyanabban az arányban van és a harmadik a negyedikkel, az ötödik pedig a másodikkal szintén ugyanabban az arányban van és a hatodik a negyedikkel, az első meg az ötödik összege a másodikkal ugyanabban az arányban van és a harmadik meg a hatodik összege a negyedikkel.



Mert legyen az első AB a második c-vel ugyanabban az arányban és a harmadik DE a negyedik f-fel, az ötödik BG pedig a második c-vel ugyanabban az arányban és a hatodik EH a negyedik f-fel. Azt mondom, hogy az első meg az ötödik összege, AG a második c-vel ugyanabban az arányban van és a harmadik meg a hatodik összege DH a negyedik f-fel.

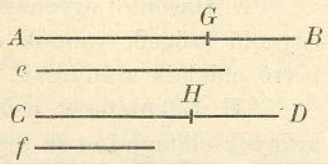
Minthogy a BG úgy aránylik a c-hez, az EH az f-hez, megfordítva is, a c úgy aránylik a BG-hez, mint az f az EH-hoz (V. 7. porizma). Minthogy az AB úgy aránylik a c-hez, mint a DE az f-hez, a c pedig a BG-hez, mint az f az EH-hoz, az AB úgy aránylik a BG-hez, mint a DE az EH-hoz (V. 22.). És minthogy a szétbontott mennyiségek arányosak, az összetettek is arányosak (V. 18.). Tehát az AG úgy aránylik a GB-hez, mint a DH a HE-hez. A BG

pedig úgy aránylik a c-hez, mint az EH az f-hez. Tehát az AG úgy aránylik a c-hez, mint a DH az f-hez.

Ha tehát az első a másodikkal ugyanabban az arányban van és a harmadik a negyedikkel, az ötödik pedig a másodikkal szintén ugyanabban az arányban van és a hatodik a negyedikkel, az első meg az ötödik összege a másodikkal ugyanabban az arányban van és a harmadik meg a hatodik összege a negyedikkel. Ezt kellett bebizonyítanunk.

25.

Ha a négy mennyiség arányos, a legnagyobb közülük meg a legkisebb a két másiknál nagyobb.



Legyen a négy arányos mennyiség AB, CD, e, f; az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az e az f-hez, a legnagyobb közülük az AB, a legkisebb pedig az f. Azt mondom, hogy az AB meg az f nagyobb, mint a CD meg az e.

Mert tegyük egyenlővé az e-vel az AG-t, az f-fel pedig a CH-t.

Minthogy az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az e az f-hez, az e pedig egyenlő az AG-vel és az f a CH-val, az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az AG a CH-hoz. És minthogy az egész AB úgy aránylik az egész CD-hez, mint az AG rész a CH részhez, a GB maradék is úgy aránylik a HD maradékhoz, mint az egesz AB az egész CD-hez (V. 19.). Nagyobb pedig az AB a CD-nél. Nagyobb tehát a GB is a HD-nél. És minthogy az AG egyenlő az e-vel, a CH pedig az f-fel, az AG, f annyi, mint a CH, e. És [minthogy] ha [nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk, az egészek nem egyenlők (IV. axioma), tehát ha] a GB, HD nem egyenlők közül, melyeknek nagyobbika a GB, a GB-hez hozzáadjuk az AG-t, f-et, a HD-hez pedig hozzáadjuk a CH-t, e-t, az AB, f összege nagyobb, mint a CD, e.

Ha tehát négy mennyiség arányos, a legnagyobb közülük meg a legkisebb a két másiknál nagyobb. Ezt kellett bebizonyítanunk.

VI. KÖNYV.

Definiciók.

I. Hasonló egyenesvonalú idomok azok, melyeknek egyes egyenlő szögeik vannak és melyeknek az egyenlő szögek mellett fekvő oldalaik arányosak.

[II. Ellentétesek pedig az idomok, ha az idomok egyikében az arányok előtagjai és (a másikában az) utótagjai vannak.]

III. Azt mondjuk, hogy *külső és középső arányban metszünk egy egyenest,* ha az egész úgy aránylik a nagyobb részhez, mint a nagyobbik a kisebbikhez.

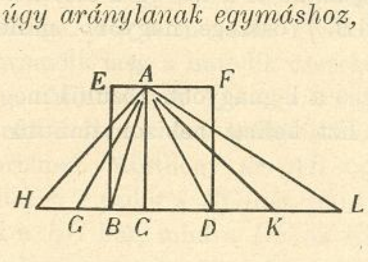
Aranymetszés, mértani középarányos, folytonos arányban való metszés. L. II. 11.

IV. Minden idom magassága a csúcstól az alapra bocsátott merőleges.

[V. Azt mondjuk, hogy arányt arányokból összeteszünk, ha az arányok mekkoraságai egymással megszorozva alkotják azt.]

1.

Ugyanazon magasságú háromszögek és parallelogrammok úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik.



Legyenek a háromszögek ABC, ACD, a parallelogrammok pedig EC, CF, ugyanazzal az AC magassággal. Azt mondom, hogy a BC alap úgy aránylik a CD alaphoz, mint az ABC háromszög az ACD háromszöghöz és az EC parallelogramm a CF parallelogrammhoz.

Mert hosszabbítsuk meg BD-t mindkét oldalán a H, L pontokig, tegyük a BC alappal egyenlővé a BG, GH mindegyikét, a CD alappal pedig egyenlővé a DK, KL mindegyikét és húzzuk meg AG-t, AH-t, AK-t, AL-et.

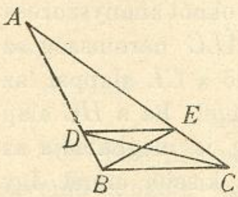
És minthogy CB, BG, GH egyenlők egymással, az AHG, AGB, ABC háromszögek is egyenlők egymással (I. 38.). Ahányszorosa tehát a HC alap a BC alapnak, annyiszorosa az AHC háromszög az ABC háromszögnek. Ugyanebből az okból ahányszorosa az LC alap a CD alapnak, annyiszorosa az ALC háromszög az ACD háromszögnek. És ha a HC alap egyenlő a CL alappal, az AHC háromszög is egyenlő az ACL háromszöggel, ha a HC alap meghaladja a CL alapot, az AHC háromszög is meghaladja az ACL háromszöget és ha az kisebb annál, ez is kisebb ennél. Igy négy adott mennyiségnek, a két BC, CD alapnak és a két ABC, ACD háromszögnek felvettük egyenlő többszöröseit, a BC alapnak és az ABC háromszögnek a HC alapot és az AHC háromszöget, a CD alapnak és az ACD háromszögnek pedig más, tetszőleges egyenlő többszörösét, az LC alapot és az ALC háromszöget. És bebizonyitottuk, hogy, ha a HC alap meghaladja a CL alapot, az AHC háromszög is meghaladja az ALC háromszöget, egyenlő vele, ha az egyenlő azzal és kisebb nála, ha az kisebb annál. A BC alap tehát úgy aránylik a CD alaphoz, mint az ABC háromszög az ACD háromszöghöz. (V. V. def.).

És minthogy az ABC háromszög kétszerese az EC parallelogramm, az ACD háromszög kétszerese pedig az FC parallelogramm (I. 34.), a részek pedig ugyanannyiszoros többszöröseikkel ugyanabban az arányban vannak (V. 15.), az ABC háromszög úgy aránylik az ACD háromszöghöz, mint az EC parallelogramm az FC parallelogrammhoz. Minthogy pedig bebizonyítottuk, hogy a BC alap úgy aránylik a CD alaphoz, mint az ABC háromszög az ACD háromszöghöz, az ABC háromszög pedig úgy aránylik az ACD háromszöghöz, mint az EC parallelogramm a CF parallelogrammhoz, a BC alap úgy aránylik a CD alaphoz, mint az EC parallelogramm az FC parallelogrammhoz (V. 11.).

Tehát ugyanazon magasságú háromszögek és parallelogrammok úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik. Ezt kellett bebizonyítanunk.

2.

Ha a háromszögnek egyik oldalával párhuzamos egyenest húzunk, ez arányosan metszi a háromszög oldalait. És ha a háromszög oldalait arányosan felosztjuk, a felosztási pontokon át húzott egyenes párhuzamos a háromszög harmadik oldalával.



Mert húzzuk meg *ABC* háromszögnek egyik, *BC* oldalával párhuzamosan a *DE*-t. Azt mondom, hogy a *BD* úgy aránylik a *DA*-hoz, mint a *CE* az *EA*-hoz.

Mert húzzuk meg *BE*-t, *CD*-t. A *BDE* háromszög tehát egyenlő a *CDE* háromszöggel. Mert ugyanazon a *DE* alapon és ugyanazon *DE*, *BC* párhuzamosok között vannak (I. 38.). Más pedig az *ADE* háromszög. Egyenlők pedig ugyanazzal ugyanabban az arányban vannak (V. 7.). A *BDE* háromszög tehát úgy aránylik az *ADE* háromszöghöz, mint a *CDE* háromszög az *ADE* háromszöghöz. De a *BDE* háromszög úgy aránylik az *ADE* háromszöghöz, mint a *BD* a *DA*-hoz. Mert ugyanaz a magasságuk van, az *E*-ből az *AB*-re bocsátott merőleges, ennélfogva úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (VI. 1.). Ugyanebből az okból a *CDE* háromszög úgy aránylik az *ADE* háromszöghöz, mint a *CE* az *EA*-hoz. És így a *BD* úgy aránylik a *DA*-hoz, mint a *CE* az *EA*-hoz.

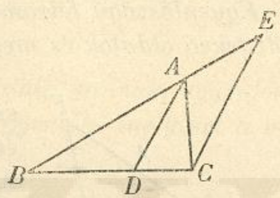
Osszuk fel az *ABC* háromszögnek *AB*, *AC* oldalait arányosan, hogy a *BD* úgy legyen a *DA*-hoz, mint a *CE* az *EA*-hoz és húzzuk meg *DE*-t. Azt mondom, hogy a *DE* párhuzamos a *BC*-vel.

Mert ugyanezeket összehasonlítva, a *BD* úgy aránylik a *DA*-hoz, mint a *CE* az *EA*-hoz, másrészt meg a *BD* úgy aránylik a *DA*-hoz, mint a *BDE* háromszög az *ADE* háromszöghöz, a *CE* pedig az *EA*-hoz, mint a *CDE* háromszög az *ADE* háromszöghöz (VI. 1.), a *BDE* háromszög úgy aránylik az *ADE* háromszöghöz, mint a *CDE* háromszög az *ADE* háromszöghöz (V. 11.). A *BDE*, *CDE* háromszögek mindegyike tehát az *ADE*-vel ugyanabban az arányban van. A *BDE* háromszög tehát egyenlő a *CDE* háromszöggel (V. 9.). És ugyanazon a *DE* alapon vannak. Egyenlő háromszögek pedig ugyanazon az alapon ugyanazon párhuzamosok között vannak (I. 39.). A *DE* tehát párhuzamos a *BC*-vel.

Ha tehát a háromszögnek egyik oldalával párhuzamos egyenest húzunk, ez arányosan metszi a háromszög oldalait. És ha a háromszög oldalait arányosan felosztjuk, a felosztási pontokon át húzott egyenes párhuzamos a háromszög harmadik oldalával. Ezt kellett bebizonyítanunk.

3.

Ha a háromszög szögét megfelezzük, a szögfelező egyenes pedig az alapot is metszi, az alap szeletei ugyanabban vannak a háromszög másik két oldalával. És ha az alap szeletei ugyanabban az arányban vannak a háromszög másik két oldalával, a csúcstól a metszési ponthoz húzott egyenes megfelezi a háromszög szögét.



Legyen a háromszög ABC és felezze meg a BAC szöget az AD egyenes. Azt mondom, hogy a BD úgy aránylik a CD-hez, mint a BA az AC-hez.

Húzzuk meg a C-n át a DA-val párhuzamos CE-t és a BA meghosszabbítva találkozzék vele E-ben.

És minthogy az AD, EC párhuzamosokat metszi az AC egyenes, az ACE szög egyenlő a CAD-vel (I. 29.). De felvettük, hogy a CAD egyenlő a BAD-vel. A BAD tehát egyenlő az ACE-vel. Viszont, minthogy az AD, EC párhuzamosokat metszi a BAC egyenes, a külső BAD szög egyenlő a belső AEC-vel (I. 29.). Bebizonyítottuk pedig, hogy az ACE egyenlő a BAD-vel. Az ACE szög tehát egyenlő az AEC szöggel. Ennélfogva az AE oldal egyenlő az AC oldallal (I. 6.). És minthogy a BCE háromszög egyik, EC oldalával párhuzamos az AD, a BD úgy aránylik a DC-hez, mint a BA az AE-hez (VI. 2.). Az AE pedig egyenlő az AC-vel. A BD tehát úgy aránylik a DC-hez, mint a BA az AC-hez.

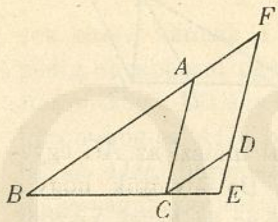
Legyen a BD úgy a DC-hez, mint a BA az AC-hez és húzzuk meg AD-t. Azt mondom, hogy a BAC szöget megfelezi az AD egyenes.

Mert ugyanezeket összehasonlítva, minthogy a BD úgy aránylik a DC-hez, mint a BA az AC-hez, a BD úgy aránylik a DC-hez, mint a BA az AE-hez. Mert a BCE háromszög egyik, EC oldalával párhuzamos az AD (VI. 2.). Tehát a BA úgy aránylik az AC-hez, mint a BA az AE-hez (V. 11.). Az AC tehát egyenlő az AE-vel (V. 9.). Ennélfogva az AEC szög is egyenlő az ACE szöggel (I. 5.). De az AEC külső szög egyenlő a BAD szöggel, az ACE szög pedig egyenlő a CAD váltószögével (I. 29.). A BAD szög tehát egyenlő a CAD szöggel. Tehát a BAC szöget megfelezi az AD egyenes.

Ha tehát a háromszög szögét megfelezzük, a szögfelező egyenes pedig az alapot is metszi, az alap szelepei ugyanabban az arányban vannak a háromszög másik két oldalával. És ha az alap szeletei ugyanabban az arányban vannak a háromszög másik két oldalával, a csúcstól a metszési ponthoz húzott egyenes megfelezi a háromszög szögét. Ezt kellett bebizonyítanunk.

4.

Egyenlőszögű háromszögekben arányosak az egyenlő szögek között fekvő oldalok és megfelelőek az egyenlő szögeket átfogók.



Legyenek az ABC, DCE egyenlőszögű háromszögeknek ABC és DCE, BAC és CDE, ACB és CED egyenlő szögeik. Azt mondom, hogy az ABC, DCE háromszögekben arányosak az egyenlő szögek között fekvő oldalok és megfelelőek az egyenlő szögeket átfogók.

Hosszabbítsuk meg a BC-t a CE-ig. És minthogy az ABC, ACB szögek két derékszögnél kisebbek (I. 17.), az ACB szög pedig egyenlő a DEC szöggel, az ABC, DEC szögek két derékszögnél kisebbek. A BA és az ED tehát meghosszabbítva, találkoznak (V. poszt.). Meghosszabbítva, találkozzanak F-ben.

És minthogy a DCE szög egyenlő az ABC szöggel, a BF és a CD párhuzamosak (I. 28.). Viszont, minthogy az ACB szög egyenlő a DEC-vel, az AC párhuzamos az FE-vel. Az $FACD$ tehát parallelogramm. Az FA tehát egyenlő a DC-vel, az AC pedig az FD-vel (I. 34.). És minthogy az FBE háromszögnek egyik, FE oldalával párhuzamosan vontuk az AC-t, a BA úgy aránylik az AF-hez, mint a BC a CE-hez (VI. 2.). Az AF pedig egyenlő a CD-vel. A BA tehát úgy aránylik a CD-hez, mint a BC a CE-hez és felcserélve, az AB a BC-hez, mint a DC a CE-hez (V. 16.). Viszont, minthogy a CD párhuzamos a BF-fel, a BC úgy aránylik a CE-hez, mint az FD a DE-hez. Az FD pedig egyenlő az AC-vel. A BC tehát úgy aránylik a CE-hez, mint az AC a DE-hez és felcserélve, a BC a CA-hoz, mint a CE az ED-hez. Minthogy azonban bebizonyítottuk, hogy az AB úgy aránylik a BC-hez, mint a DC a CE-hez, a BC pedig a

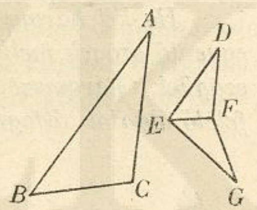
CA-hoz, mint a CE az ED-hez, az egyenlőség miatt a BA úgy aránylik az AC-hez, mint a CD a DE-hez (V. 22.).

Tehát az egyenlőszögű háromszögekben arányosak az egyenlő szögek között fekvő oldalok és megfelelőek az egyenlő szögeket átfogók. Ezt kellett bebizonyítanunk.

Míg az I. könyvben Euklides a háromszögek egybevágósági eseteit szétszórta (l. az I. könyv 8. feladatának jegyzetét), mert inkább a szigorú megokolást, bizonyítást tartotta szem előtt, semmint a rokon tételeknek egymásutánba való elrendezését, ha e kettős követelés nehézségeket okozott, addig a háromszögek hasonlósági eseteit sikerült a VI. könyv négy egymásután következő 4., 5., 6. és 7. feladatában összefoglalnia.

5.

Ha két háromszögnek arányos oldalaik vannak, egyenlőszögűek a háromszögek és azok a szögeik egyenlők, melyeket a megfelelő oldalok átfognak.



Legyenek a két ABC, DEF háromszögnek arányos oldalaik; az AB úgy aránylik a BC-hez, mint a DE az EF-hez, a BC pedig a CA-hoz, mint az EF az FD-hez és a BA az AC-hez, mint az ED a DF-hez. Azt mondom, hogy egyenlőszögű az ABC háromszög a DEF háromszöggel és egyenlők azok a szögeik, melyeket a megfelelő oldalok átfognak, az ABC szög a DEF-fel, a BCA az EFD-vel és a BAC az EDF-fel.

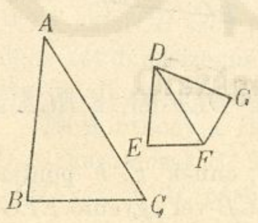
Mert szerkesszük meg az EF egyenesre, ennek E, F pontjaiban az ABC szöggel egyenlő FEG-t és az ACB-vel egyenlő EFG-t (I. 23.). Így tehát az A-nál fekvő harmadik szöggel egyenlő a G-nél fekvő harmadik szög (I. 32.).

Egyenlő szögű tehát az ABC háromszög az EGF háromszöggel. Az ABC, EGF háromszögekben tehát arányosak az egyenlő szögek között fekvő oldalok és megfelelőek az egyenlő szögeket átfogók (VI. 4.). Az AB tehát úgy aránylik a BC-hez, mint a GE az EF-hez. De az AB úgy aránylik a BC-hez, mint, ahogyan felvettük, a DE az EF-hez. A DE tehát úgy aránylik az EF-hez, mint a GE az EF-hez (V. 11.). Tehát a DE, GE mindegyike az EF-fel ugyanabban az arányban van. A DE tehát egyenlő a GE-vel (V. 9.). Ugyanebből az okból a DF egyenlő a GF-fel. Minthogy a DE egyenlő az EG-vel, közös pedig az EF, a két DE, EF egyenlő a két GE-vel, EF-fel. És a DF alap egyenlő az FG alappal. Tehát a DEF szög egyenlő a GEF szöggel, a DEF háromszög egyenlő a GEF háromszöggel és a másik két szög egyenlő a másik két szöggel, melyeket az egyenlő oldalok átfognak (I. 4.). Egyenlő tehát a DEF szög a GFE-vel, az EDF pedig az EGF-fel. És minthogy az FED szög egyenlő a GEF-fel, másrészt pedig a GEF az ABC-vel, az ABC szög is egyenlő a DEF-fel. Ugyanebből az okból az ACB szög egyenlő a DFE-vel és az A-nál fekvő a D-nél fekvővel. Egyenlő szögű tehát az ABC háromszög a DEF háromszöggel.

Ha tehát két háromszögnek arányos oldalaik vannak, egyenlő szögűek a háromszögek és azok a szögeik egyenlők, melyeket a megfelelő oldalok átfognak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

6.

Ha két háromszögnek egy szöggel egyenlő egy szöge van, az egyenlő szögek mellett fekvő oldalaik pedig arányosak, egyenlőszögűek a háromszögek és azok a szögeik egyenlők, melyeket a megfelelő oldalok átfognak.



Legyen a két ABC, DEF háromszögnek egyik BAC szöge egyenlő egyik EDF szögével, az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok pedig arányosak, a BA úgy aránylik az AC-hez, mint az ED a DF-hez. Azt mondom, hogy egyenlőszögű az ABC háromszög a DEF háromszöggel és az ABC szög egyenlő a DEF szöggel, az ACB pedig a DFE-vel.

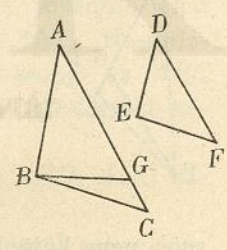
Mert szerkesszük meg a DF egyenesre, ennek D, F pontjaiban a BAC, EDF mindegyikével egyenlő FDG-t és az ACB-vel egyenlő DFG-t (I. 23.). Igy tehát a B-nél fekvő harmadik szöggel egyenlő a G-nél fekvő harmadik szög (I. 32.).

Egyenlőszögű tehát az ABC háromszög a DGF háromszöggel. A BA tehát úgy aránylik az AC-hez, mint a GD a DF-hez (VI. 4.). Felvettük pedig, hogy a BA úgy aránylik az AC-hez, mint az ED a DF-hez. Tehát az ED úgy aránylik a DF-hez, mint a GD a DF-hez (V. 11.). Az ED tehát egyenlő a DG-vel (V. 9.). És közös a DF. Így a két ED, DF egyenlő a két GD-vel, DF-fel. És az EDF szög egyenlő a GDF szöggel. Az EF alap tehát egyenlő a GF alappal, a DEF háromszög egyenlő a GDF háromszöggel és a másik két szög is egyenlő a másik két szöggel, melyeket az egyenlő oldalok átfognak (I. 4.). Egyenlő tehát a DFG szög a DFE-vel, a DGF a DEF-fel. De a DFG szög egyenlő az ACB szöggel. Az ACB tehát egyenlő a DFE-vel. Felvettük pedig, hogy a BAC szög egyenlő az EDF-fel. Tehát a B-nél fekvő harmadik szög egyenlő az E-nél fekvő harmadik szöggel. Egyenlőszögű tehát az ABC háromszög a DEF háromszöggel.

Ha tehát két háromszögnek egy szöggel egyenlő egy szöge van, az egyenlő szögek mellett fekvő oldalaik pedig arányosak, egyenlőszögűek a háromszögek és azok a szögeik egyenlők, melyeket a megfelelő oldalok átfognak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

7.

Ha két háromszögnek egy szöggel egyenlő egy szöge és egy másik szög mellett fekvő arányos oldalaik vannak, a fennmaradó szögek mindegyike pedig vagy kisebb vagy nem kisebb a derékszögnél, a háromszögek egyenlőszögűek és azok a szögeik egyenlők, melyeket az arányos oldalok befognak.



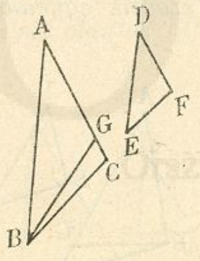
Legyen a két ABC, DEF háromszögnek egyik BAC szöge egyenlő egyik EDF szögével, a másik ABC, DEF szögek mellett fekvő oldalok pedig arányosak, az AB úgy aránylik a BC-hez, mint a DE az EF-hez, a C-nél, F-nél fekvő fennmaradó szögek mindegyike pedig legyen először kisebb a derékszögnél. Azt mondom, hogy egyenlőszögű az ABC háromszög a DEF háromszöggel, az ABC szög egyenlő a DEF szöggel és a C-nél fekvő harmadik szög az F-nél fekvő harmadik szöggel.

Mert ha nem egyenlő az ABC szög a DEF szöggel, egyikük nagyobb. Legyen a nagyobb az ABC. Szerkesszük meg az AB egyenesre, ennek B pontjában a DEF szöggel egyenlő ABG szöget (I. 23.).

És minthogy az A-nál fekvő szög egyenlő a D-nél fekvő szöggel, az ABG pedig egyenlő a DEF-fel, a harmadik AGB szög is egyenlő a harmadik DFE szöggel (I. 32.). Egyenlőszögű tehát az

ABG háromszög a DEF háromszöggel. Az AB tehát úgy aránylik a BG-hez, mint a DE az EF-hez (VI. 4.). A DE pedig úgy aránylik az EF-hez, mint, miképen felvettük, az AB a BC-hez. Az AB tehát a BC, BG mindegyikével ugyanabban az arányban van (V. 11.). A BC tehát egyenlő a BG-vel (V. 9.). Ennélfogva a C-nél fekvő szög is egyenlő a BGC szöggel (I. 5.). A C-nél fekvő szög pedig, miképen felvettük, kisebb a derékszögnél. Tehát a BGE szög is kisebb a derékszögnél. Ennélfogva ennek AGB mellékszöge nagyobb a derékszögnél (I. 13.). Bebizonyítottuk pedig, hogy ez egyenlő az F-nél fekvő szöggel. Így tehát az F-nél fekvő szög is nagyobb a derékszögnél. Feltettük pedig, hogy kisebb a derékszögnél. Ez pedig képtelenség. Az ABC szög tehát nem különbözik a DEF szögtől. Tehát egyenlő vele. És az A-nál fekvő szög egyenlő a D-nél fekvő szöggel. Tehát a C-nél fekvő harmadik szög is egyenlő az F-nél fekvő harmadik szöggel (I. 32.). Egyenlőszögű tehát az ABC háromszög a DEF háromszöggel.

Tegyük fel viszont, hogy a C-nél, F-nél fekvő szögek mindegyike nem kisebb a derékszögnél. Azt mondom viszont, hogy ekkor is egyenlőszögű az ABC háromszög a DEF háromszöggel.



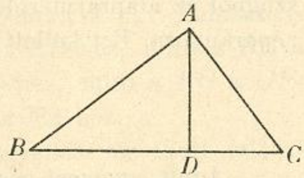
Mert ugyanezeket összehasonlítva, hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a BC egyenlő a BG-vel. Ennélfogva a C-nél fekvő szög egyenlő a BGC szöggel. A C-nél fekvő szög pedig nem kisebb a derékszögnél. Tehát a BGC szög sem kisebb a derékszögnél. Így tehát a BGC háromszög két szöge két derékszögnél nem kisebb. Ez pedig lehetetlen (I. 17.). Tehát viszont az ABC szög nem különbözik a DEF szögtől. Tehát egyenlő vele. De az A-nál fekvő szög is egyenlő a D-nél fekvő szöggel. Tehát a C-nél fekvő harmadik szög is egyenlő az F-nél fekvő harmadik szöggel. Egyenlőszögű tehát az ABC háromszöggel a DEF háromszöggel.

Ha tehát két háromszögnek egy szöggel egyenlő egy szöge és egy másik szög mellett fekvő arányos oldalaik vannak, a fenmaradó szöge mindegyike pedig vagy kisebb vagy nem kisebb a derékszögnél, a háromszögek egyenlőszögűek és azok a szögeik egyenlők, melyeket az arányos oldalok befognak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

8.

Ha a derékszögű háromszögben a derékszögből az alapra merőlegest bocsátunk, a merőleges mellett fekvő háromszögek hasonlók az egészhez és egymáshoz.

Legyen az ABC derékszögű háromszög derékszöge a BAC szög és bocsássuk az A pontból a BC-re merőleges AD-t. Azt mondom, hogy hasonló az ABD, ADC háromszögek mindegyike az egész ABC-hez és egymáshoz.



A BAC szög egyenlő az ADB szöggel. Mert mindegyikük derékszög. És közös a két ABC, ABD háromszögnek a B-nél fekvő szöge, tehát a harmadik, ACB szög egyenlő a harmadik BAD-vel (I. 32.). Egyenlőszögű tehát az ABC háromszög az ABD háromszöggel. Az ABC háromszög derékszögét átfogó BC tehát úgy aránylik az ABD háromszög derékszögét átfogó AB-hez, mint az ABC háromszögnek a C-nél fekvő szögét átfogó ugyanaz az AB az ABD háromszögnek BAD szögét átfogó BD-hez és mint az AC a két háromszögnek a B-nél fekvő közös szögét átfogó AD-hez (VI. 4.). Az ABC háromszög tehát az ABD háromszöggel egyenlőszögű és az egyenlő szögek mellett fekvő oldalaik arányosak. Hasonló tehát az ABC háromszög az ABD háromszöghöz (VI. I. def.). Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy az ADC háromszög is hasonló az ABC háromszöghöz. Tehát az ABD, ADC (háromszögek) mindegyike hasonló az egész ABC-hez.

Azt mondom, hogy egymáshoz is hasonlók az ABD, ADC háromszögek.

Minthogy a BDA derékszög az ADC derékszöggel egyenlő és bebizonyítottuk, hogy a BAD szög egyenlő a C-nél fekvő szöggel, a B-nél fekvő harmadik szög is egyenlő a harmadik DAC szöggel (I. 32.). Egyenlőszögű tehát az ABD háromszög az ADC háromszöggel. Tehát az ABD háromszögnek BAD szögét átfogó BD úgy aránylik az ADC háromszögnek a C-nél fekvő és a BAD szöggel egyenlő szögét átfogó DA-hoz, mint az ABD háromszögnek a B-nél fekvő szögét átfogó ugyanaz az AD az ADC háromszögnek DAC és a B-nél fekvő szöggel egyenlő szögét átfogó DC-hez és mint a BA a derékszöget átfogó AC-hez (VI. 4.). Hasonló tehát az ABD háromszög az ADC háromszöghöz.

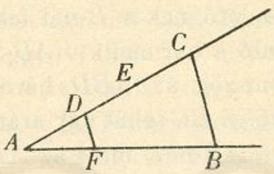
Ha tehát a derékszögű háromszögben a derékszögből az alapra merőlegest bocsátunk, a merőleges mellett fekvő háromszögek hasonlók az egészhez és egymáshoz. (Ezt kellett bebizonyítanunk.)

Porizma (következmény).

Ebből kitűnik, hogy, ha a derékszögű háromszögben a derékszögből az alapra merőlegest bocsátunk, ez az alap szeleteinek középarányosa. Ezt kellett bebizonyítanunk.

9.

Adott egyenest osszunk fel adott számú részre.



Legyen az adott egyenes AB. Ezt az AB-t osszuk fel adott számú részre.

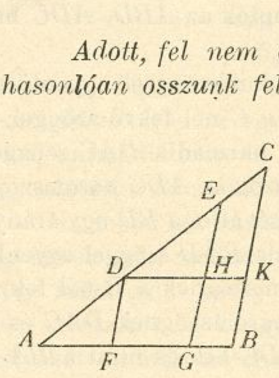
Legyen az a harmadrésze. Húzzuk meg az A pontból az AB-vel tetszőleges szöget bezáró AC-t. Vegyünk fel az AC-ben tetszőleges D pontot és tegyük AD-vel egyenlővé DE-t, EC-t. Húzzuk meg BC-t és a D ponton át húzzuk meg a vele párhuzamos DF-et (I. 31.).

Minthogy az ABC háromszög egyik BC oldalával párhuzamosan húztuk az FD-t, a CD úgy aránylik a DA-hoz, mint a BF az FA-hoz (VI. 2.). A CD pedig kétszerese a DA-nak. Tehát a BF is kétszerese az FA-nak. Tehát a BA az FA háromszorosa.

Tehát az adott AB egyenest három részre osztottuk AF-fel. Ezt kellett elvégeznünk.

10.

Adott, fel nem osztott egyenest adott felosztott egyeneshez hasonlóan osszunk fel.



Legyen az adott, fel nem osztott egyenes AB, a D, E pontokban felosztott pedig AC; helyezzük el ezeket úgy, hogy tetszőleges szöget zárjanak be, húzzuk meg CB-t és a D, E pontokon át húzzuk meg a BC-vel párhuzamos DF-et, EG-t, a D-n át pedig az AB-vel párhuzamos DHK-t.

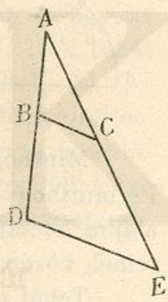
Parallelogramm tehát az FH, HB mindegyike. A DH tehát egyenlő az FG-vel, a HK pedig a GB-vel (I. 34.). És minthogy a DKC háromszög egyik, KC oldalával párhuzamosan húztuk a HE-t, a CE úgy aránylik az ED-hez, mint a KH a HD-hez (VI. 2.). De a KH egyenlő a BG-vel, a HD pedig a GF-fel. Tehát a CE úgy aránylik az ED-hez, mint a BG a GF-hez. Viszont, minthogy az AGE háromszög egyik, GE oldalával párhuzamosan húztuk az FD-t, az ED úgy aránylik a DA-hoz, mint a GF az FA-hoz (VI. 2.). Bebizonyítottuk pedig, hogy a CE úgy aránylik az ED-hez, mint a BG a GF-hez. Tehát a CE úgy aránylik az ED-hez, mint a BG a GF-hez, az ED pedig a DA-hoz, mint a GF az FA-hoz.

Tehát az adott, fel nem osztott AB egyenest az adott felosztott AC egyeneshez hasonlóan osztottuk fel. Ezt kellett elvégeznünk.

11.

Két adott egyeneshez találjuk meg a harmadik arányost.

Legyen az adott (két egyenes) BA, AC és zárjanak be tetszőleges szöget. A BA-hoz, AC-hez találjuk meg a harmadik arányost. Hosszabbítsuk meg őket a D, E pontokig, tegyük AC-vel egyenlővé BD-t, húzzuk meg BC-t és a D-n át húzzuk meg a vele párhuzamos DE-t.



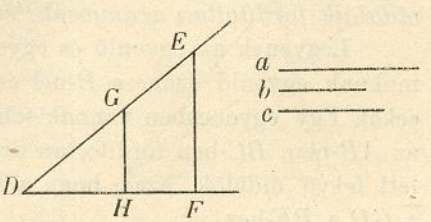
Minthogy az ADE háromszögnek egyik, DE oldalával párhuzamosan húztuk a BC-t, az AB úgy aránylik a BD-hez, mint az AC a CE-hez. A BD pedig egyenlő az AC-vel. Tehát az AB úgy aránylik az AC-hez, mint az AC a CE-hez.

Tehát a két adott AB, AC egyeneshez megtaláltuk a velük arányos, harmadik CE-t. Ezt kellett elvégeznünk.

12.

Három adott egyeneshez találjuk meg a negyedik arányost.

Legyen az adott három egyenes a, b, c. Az a-hoz, b-hez, c-hez találjuk meg a negyedik arányost.



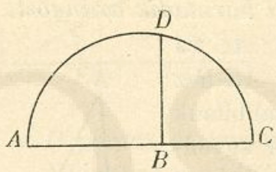
Helyezzük el a két DE, DF egyenest úgy, hogy (tetszőleges) EDF szöget zárjanak be. Tegyük az a-val egyenlővé a DG-t, a b-vel a GE-t, a c-vel pedig a DH-t. És húzzuk meg a GH-val az E-n át a vele párhuzamos EF-et.

Minthogy a DEF háromszögnek egyik, EF oldalával párhuzamosan húztuk a GH-t, a DG úgy aránylik a GE-hez, mint a DH a HF-hez. A DG pedig egyenlő az a-val, a GE a b-vel és a DH a c-vel. Tehát az a úgy aránylik a b-hez, mint a c a HF-hez.

Tehát a három adott a, b, c egyeneshez megtaláltuk a negyedik HF arányost. Ezt kellett elvégeznünk.

13.

Két adott egyeneshez találjuk meg a középarányost.



Legyen a két adott egyenes AB, BC. Az AB-hez, BC-hez találjuk meg a középarányost.

Helyezzük őket egy egyenesbe, rajzoljuk meg az AC-re az ADC félkört, állítsuk a B pontban az AC-re merőleges BD-t és húzzuk meg AD-t, DC-t. Minthogy félkörben van az ADC szög, azért derékszög (III. 31.). És minthogy az ADC derékszögű háromszögnek derékszögéből az alapra bocsátott merőleges a DB, a DB az alap AB, BC szeleteinek középarányosa.

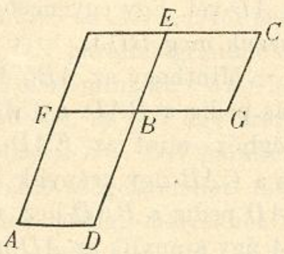
Tehát a két adott AB, BC egyeneshez megtaláltuk a DB középarányost. Ezt kellett elvégeznünk.

14.

Egyenlő és egyenlőszögű parallelogrammokban fordítottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok. És az egyenlőszögű parallelogrammok, melyeknek az egyenlő szögek mellett fekvő oldalaik fordítottan arányosak, egyenlők.

Legyenek az egyenlő és egyenlőszögű AB, BC parallelogrammoknak egyenlő szöge a B-nél és húzzuk meg a DB, BE egyeneseket. Egy egyenesben vannak tehát FB, BG. Azt mondom, hogy az AB-ben, BC-ben forditottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok, azaz, hogy a DB úgy aránylik a BE-hez, mint a GB a BF-hez.

Rajzoljuk ki az FE parallelogrammot. Minthogy az AB parallelogramm egyenlő a BC parallelogrammal, más pedig az FE, az AB úgy aránylik az FE-hez, mint a BC az FE-hez (V. 7.). De az AB úgy aránylik az FE-hez, mint a DB a BE-hez, a BC pedig az FE-hez, mint a GB a BF-hez (VI. 1.). Tehát a DB úgy aránylik a BE-hez, mint a GB a BF-hez. Tehát az AB, BC parallelogrammokban fordítottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok.



Legyen a DB a BE-hez, mint a GB a BF-hez. Azt mondom, hogy az AB parallelogramm egyenlő a BC parallelogrammal.

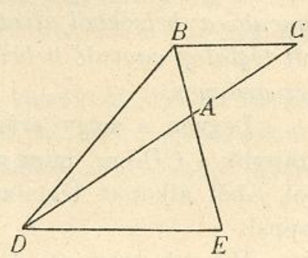
Minthogy a DB úgy aránylik a BE-hez, mint a GB a BF-hez, másrészt meg a DB a BE-hez, mint az AB parallelogramm az FE parallelogrammhoz (VI. 1.), a GB úgy aránylik a BF-hez, mint a BC parallelogramm az FE parallelogrammhoz és így az AB úgy aránylik az FE-hez, mint a BC az FE-hez (V. 11.). Tehát az AB parallelogramm egyenlő a BC parallelogrammal (V. 9.).

Tehát egyenlő és egyenlőszögű parallelogrammokban fordítottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok. És az egyenlőszögű parallelogrammok, melyeknek az egyenlő szögek mellett fekvő oldalaik fordítottan arányosak, egyenlők. Ezt kellett bebizonyítanunk.

15.

Egyenlő háromszögekben, melyeknek egy-egy egyenlő szögük van, fordítottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok. És a háromszögek, melyeknek egy-egy egyenlő szögük van és az egyenlő szögek mellett fekvő oldalaik fordítottan arányosak, egyenlők.

Legyen az ABC, ADE egyenlő háromszögeknek egy-egy egyenlő szöge BAC, DAE. Azt mondom, hogy az ABC, ADE háromszögekben fordítottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok, azaz, hogy a CA úgy aránylik az AD-hez, mint az EA az AB-hez.



Helyezzük el egy egyenesbe a CA-t

az *AD*-vel. Egy egyenesben vannak tehát az *EA* és az *AB* is. És húzzuk meg *BD*-t.

Minthogy az *ABC* háromszög egyenlő az *ADE* háromszöggel, más pedig a *BAD*, a *CAB* háromszög úgy aránylik a *BAD* háromszöghöz, mint az *EAD* háromszög a *BAD* háromszöghöz (V. 7.). De a *CAB* úgy aránylik a *BAD*-hez, mint a *CA* az *AD*-hez, az *EAD* pedig a *BAD*-hez, mint az *EA* az *AB*-hez (VI. 1.). Tehát a *CA* úgy aránylik az *AD*-hez, mint az *EA* az *AB*-hez. Tehát az *ABC*, *ADE* háromszögekben fordítottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok.

Legyenek fordítottan arányosak az oldalok az *ABC*, *ADE* háromszögekben, a *CA* aránylik az *AD*-hez, mint az *EA* az *AB*-hez. Azt mondom, hogy egyenlő az *ABC* háromszög az *ADE* háromszöggel.

Húzzuk meg a *BD*-t; minthogy a *CA* úgy aránylik az *AD*-hez, mint az *EA* az *AB*-hez és a *CA* az *AD*-hez, mint az *ABC* háromszög a *BAD* háromszöghöz, az *EA* pedig az *AB*-hez, mint az *EAD* háromszög a *BAD* háromszöghöz (VI. 1.), az *ABC* háromszög úgy aránylik a *BAD* háromszöghöz, mint az *EAD* háromszög a *BAD* háromszöghöz. Az *ABC*, *EAD* háromszögek mindegyike tehát a *BAD*-vel ugyanabban az arányban van. Tehát az *ABC* (háromszög) egyenlő az *EAD* háromszöggel (V. 9.).

Tehát egyenlő háromszögekben, melyeknek egy-egy egyenlő szögük van, fordítottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok. És a háromszögek, melyeknek egy-egy egyenlő szögük van és az egyenlő szögek mellett fekvő oldalaik fordítottan arányosak, egyenlők. Ezt kellett bebizonyítanunk.

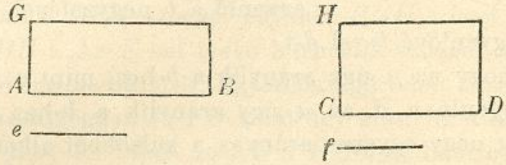
16.

Ha négy egyenes arányos, a külsőkből alkotott téglalap egyenlő a belsőkből alkotott téglalappal. És ha a külsőkből alkotott téglalap egyenlő a belsőkből alkotott téglalappal, a négy egyenes arányos.

Legyen a négy arányos egyenes *AB*, *CD*, *e*, *f*; az *AB* úgy aránylik a *CD*-hez, mint az *e* az *f*-hez. Azt mondom, hogy az *AB*-ből, *f*-ből alkotott téglalap egyenlő a *CD*-ből, *e*-ből alkotott téglalappal.

Húzzuk meg az *A*, *C* pontokban az *AB*, *CD* egyenesekre merőleges AG-t, CH-t és tegyük f-fel egyenlővé az AG-t, e-vel pedig egyenlővé a CH-t. És rajzoljuk ki a BG, DH parallelogrammokat.

Minthogy az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az e az f-hez, egyenlő pedig az e a CH-val és az f az AG-vel, az AB úgy aránylik a CD-hez, mint a CH az AG-hez. Tehát a BG, DH parallelogrammokban fordítottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok. Az egyenlőszögű parallelogrammok pedig, melyeknek az egyenlő szögek mellett fekvő oldalaik fordítottan arányosak, egyen-



lők (VI. 14.). Egyenlő tehát a BG parallelogramm a DH parallelogrammal. És a BG az AB-ből, f-ből alkotott téglalap. Mert az AG egyenlő az f-fel. A DH pedig a CD-ből, e-ből alkotott téglalap. Mert az e egyenlő a CH-val. Tehát az AB-ből, f-ből alkotott téglalap egyenlő a CD-ből, e-ből alkotott téglalappal.

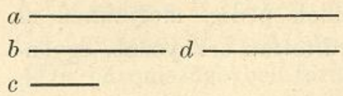
Legyen az AB-ből, f-ből alkotott téglalap egyenlő a CD-ből, e-ből alkotott téglalappal. Azt mondom, hogy a négy egyenes arányos; az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az e az f-hez.

Mert ugyanezeket összehasonlítva, az AB-ből, f-ből alkotott téglalap egyenlő a CD-ből, e-ből alkotott téglalappal és az AB-ből, f-ből alkotott téglalap a BG. Mert az AG egyenlő az f-fel. A CD-ből, e-ből alkotott téglalap pedig a DH. Mert a CH egyenlő az e-vel. Tehát a BG egyenlő a DH-val. És egyenlőszögűek. Az egyenlő és egyenlőszögű parallelogrammokban pedig fordítottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok (VI. 14.). Az AB tehát úgy aránylik a CD-hez, mint a CH az AG-hez. Egyenlő pedig a CH az e-vel, az AG az f-fel. Tehát az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az e az f-hez.

Ha tehát négy egyenes arányos, a külsőkből alkotott téglalap egyenlő a belsőkből alkotott téglalappal. És ha külsőkből alkotott téglalap egyenlő a belsőkből alkotott téglalappal, a négy egyenes arányos. Ezt kellett bebizonyítanunk.

17.

Ha három egyenes arányos, a külsőkből alkotott téglalap egyenlő a középső négyzetével. És ha a külsőkből alkotott téglalap egyenlő a középső nézetével, a három egyenes arányos.



Legyen a három arányos egyenes a, b, c; az a úgy aránylik a b-hez, mint a b a c-hez. Azt mondom, hogy az a-ból, c-ből alkotott téglalap egyenlő a b négyzetével.

Tegyük egyenlővé b-vel d-t.

És minthogy az a úgy aránylik a b-hez, mint a b a c-hez, a b-vel pedig egyenlő a d, az a úgy aránylik a b-hez, mint a d a c-hez. Ha pedig négy egyenes arányos, a külsőkből alkotott téglalap a belsőkből alkotott téglalappal (VI. 16.). Tehát az a-ból, c-ből alkotott téglalap egyenlő a b-ből, d-ből alkotott téglalappal. De a b-ből, d-ből alkotott téglalap a b négyzete. Mert a b egyenlő a d-vel. Tehát az a-ból, c-ből alkotott téglalap egyenlő a b négyzetével.

Legyen az a-ból, c-ből alkotott téglalap egyenlő a b négyzetével. Azt mondom, hogy az a úgy aránylik a b-hez, mint a b a c-hez. Mert ugyanezeket összehasonlítva, az a-ból, c-ből alkotott téglalap egyenlő a b négyzetével, másrészt a b négyzete egyenlő a b-ből, d-ből alkotott téglalappal. Mert a b egyenlő a d-vel. Az a-ból, c-ből alkotott téglalap tehát egyenlő a b-ből, d-ből alkotott téglalappal. Ha pedig a külsőkből alkotott téglalap egyenlő a belsőkből alkotott téglalappal, a négy arányos egyenes (VI. 16.). Tehát az a úgy aránylik a b-hez, mint a d a c-hez. A b pedig egyenlő a d-vel. Tehát az a úgy aránylik a b-hez, mint a b a c-hez.

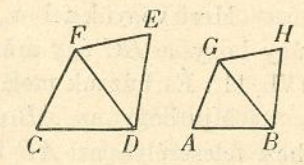
Ha tehát három egyenes arányos, a külsőkből alkotott téglalap egyenlő a középső négyzetével. És ha a külsőkből alkotott téglalap egyenlő a középső négyzetével, a három egyenes arányos. Ezt kellett bebizonyítanunk.

18.

Adott egyenesre szerkesszünk adott egyenesvonalú idomhoz hasonló és vele hasonlóan fekvő egyenesvonalú idomot.

Legyen az adott egyenes AB, az adott egyenesvonalú idom pedig CE. Az AB egyenesre szerkesszünk a CE egyenesvonalú idomhoz hasonló és vele hasonlóan fekvő egyenesvonalú idomot.

Húzzuk meg a DF-et és szerkesszük meg az AB egyenesre, ennek A, B pontjaiban a C-nél fekvő szöggel egyenlő GAB szöget és a CDF szöggel egyenlő ABG szöget (I. 23.). A harmadik CFD szöggel tehát egyenlő az AGB szög (I. 32.). Egyenlőszögű tehát az FCD háromszög a GAB háromszöggel. Az FD tehát úgy aránylik a GB-hez, mint az FC a GA-hoz és mint a CD az AB-hez (VI. 4.). Viszont szerkesszük meg a BG egyenesre, ennek B, G pontjaiban a DFE szöggel egyenlő BGH szöget és az FDE-vel egyenlő GBH-t. Az E-nél fekvő harmadik szöggel tehát egyenlő a H-nál fekvő harmadik szög. Egyenlőszögű tehát az FDE háromszög a GHB háromszöggel. Az FD tehát úgy aránylik a GB-hez, mint az FE a GH-hoz, és mint az ED a HB-hez. Bebizonyitottuk pedig, hogy az FD úgy aránylik a GB-hez, mint az FC a GA-hoz és mint a CD az AB-hez. Tehát az FC úgy aránylik az AG-hez, mint a CD az AB-hez, mint az FE a GH-hoz és mint az ED a HB-hez. És minthogy a CFD szög egyenlő az AGB szöggel, a DFE pedig a BGH-val, az egész CFE szög egyenlő az egész AGH szöggel. Ugyanebből az okból a CDE szög egyenlő az ABH szöggel. És a C-nél fekvő szög egyenlő az A-nál fekvő szöggel, az E-nél fekvő pedig a H-nál fekvővel. Egyenlőszögű tehát az AH a CE-vel. És az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok arányosak. Hasonló tehát az AH egyenesvonalú idom a CE egyenesvonalú idomhoz.

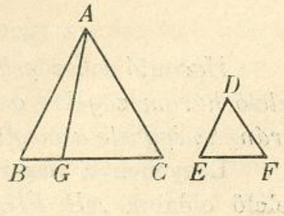


Tehát az adott AB egyenesre megszerkesztettük az adott CE egyenesvonalú idomhoz hasonló és vele hasonlóan fekvő AH egyenesvonalú idomot. Ezt kellett elvégeznünk.

19.

Hasonló háromszögek egymással annak az aránynak a négyzetében vannak, melyben a megfelelő oldalok vannak.

Legyen az ABC, DEF hasonló háromszögeknek a B-nél fekvő szöge egyenlő az E-nél fekvő szögével, az AB pedig úgy aránylik a BC-hez, mint a DE az EF-hez, úgy, hogy a BC megfelel az EF-nek. Azt mondom, hogy az ABC háromszögnek a DEF háromszöghöz való aránya négyzete a BC-nek az EF-hez valónak.



Mert vegyük fel a BC-nek, EF-nek harmadik, BG arányosát, úgy hogy a BC úgy aránylik az EF-hez, mint az EF a BG-hez. (VI. 11.) És húzzuk meg AG-t.

Minthogy az AB úgy aránylik a BC-hez, mint a DE az EF-hez, felcserélve az AB úgy aránylik a DE-hez, mint a BC az EF-hez. (VI. 16.) De a BC úgy aránylik az EF-hez, mint az EF a BG-hez. Tehát az AB úgy aránylik a DE-hez, mint az EF a BG-hez. Tehát az ABG, DEF háromszögekben fordítottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok. A háromszögek pedig, melyeknek egy-egy egyenlő szögük van és az egyenlő szögek mellett fekvő oldalaik fordítottan arányosak, egyenlők (VI. 15.). Az ABG háromszög tehát egyenlő a DEF háromszöggel. És minthogy a BC úgy aránylik az EF-hez, mint az EF a BG-hez és ha három egyenes arányos, az elsőnek a harmadikhoz való aránya négyzete a másodikhoz valónak (VI. IX. def.), a BC-nek a BG-hez való aránya négyzete a CB-nek az EF-hez valónak. A CB pedig úgy aránylik a BG-hez, mint az ABC háromszög az ABG háromszöghöz (VI. 1.). Az ABC háromszögnek az ABG háromszöghöz való aránya tehát négyzete a BC-nek az EF-hez valónak. Az ABG háromszög pedig egyenlő a DEF háromszöggel. Az ABC háromszögnek a DEF háromszöghöz való aránya tehát négyzete a BC-nek az EF-hez valónak.

Tehát hasonló háromszögek egymással annak az aránynak a négyzetében vannak, melyben a megfelelő oldalok vannak. (Ezt kellett bebizonyítanunk.)

Porizma (következmény).

Ebből kitűnik, hogy, ha három egyenes arányos, az első úgy aránylik a harmadikhoz, mint az elsőre szerkesztett idom a másodikra szerkesztett hasonló és hasonlóan fekvő idomhoz. (Minthogy bebizonyítottuk, hogy a CA úgy aránylik a BG-hez, mint az ABC háromszög az ABG háromszöghöz, azaz a DEF-hez.) Ezt kellett bebizonyítanunk.

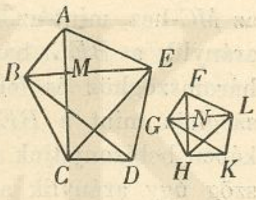
20.

Hasonló sokszögek hasonló és számra nézve az egésznek megfelelő háromszögekre osztatnak és a sokszögnek a sokszöghöz való aránya négyzete a megfelelő oldalnak a megfelelő oldalhoz valónak.

Legyenek a hasonló sokszögek $ABCDE$, $FGHKL$ és a megfelelő oldalok AB, FG. Azt mondom, hogy az $ABCDE$, $FGHKL$ sokszögek hasonló és számra nézve az egésznek megfelelő háromszögekre osztatnak és az $ABCDE$ sokszögnek az $FGHKL$ sokszöghöz való aránya négyzete az AB-nek az FG-hez valónak.

Húzzuk meg BE-t, EC-t, GL-et, LH-t.

Minthogy hasonló az $ABCDE$ sokszög az $FGHKL$ sokszöghöz, a BAE szög egyenlő a GFL szöggel (VI. I. def.). És a BA úgy aránylik az AE-hez, mint a GF az FL-hez. Minthogy a két ABE, FGL háromszögnek egy szöggel egyenlő egy szöge van, az egyenlő szögek mellett fekvő oldalaik pedig arányosak, egyenlőszögű az ABE háromszög az FGL háromszöggel (VI. 6.). Ennélfogva hasonlóak is. Az ABE szög tehát egyenlő az FGL szöggel. De az egész ABC szög is egyenlő az egész FGH szöggel a sokszögek hasonlóságának okából. A fenmaradó EBC szög tehát egyenlő az LGH szöggel. És minthogy az ABE, FGL háromszögek hasonlóságának okából az EB úgy aránylik a BA-hoz, mint az LG a GF-hez, továbbá pedig a sokszögek hasonlóságának okából az AB úgy aránylik a BC-hez, mint az FG a GH-hoz, az egyenlőségnél fogva az EB úgy aránylik a BC-hez, mint az LG a GH-hoz (V. 22.) és az egyenlő EBC, LGH mellett fekvő oldalok arányosak. Egyenlőszögű tehát az EBC háromszög az LGH háromszöggel. Ennélfogva az EBC háromszög hasonló az LGH háromszöghöz. Ugyanebből az okból az ECD háromszög is hasonló az LHK háromszöghöz. Tehát a hasonló $ABCDE$, $FGHKL$ sokszögek felosztattak hasonló és számra nézve egyenlő háromszögekre.



Azt mondom, hogy meg is felelnek az egésznek, azaz, hogy arányosak a háromszögek, az előtagok az ABE, EBC, ECD, az utótagok pedig az FGL, LGH, LHK és hogy az $ABCDE$ sokszögnek az $FGHKL$ sokszöghöz való aránya négyzete a megfelelő oldaloknak a megfelelő oldalokhoz valónak, azaz az AB-nek az FG-hez valónak.

Húzzuk meg AC-t, FH-t. És minthogy a sokszögek hasonlóságának okából az ABC szög egyenlő az FGH szöggel és az AB úgy aránylik a BC-hez, mint az FG a GH-hoz, egyenlőszögű az ABC háromszög az FGH háromszöggel (VI. 6.) A BAC szög tehát egyenlő a GFH szöggel, a BCA pedig a GHF-fel. És minthogy a BAM szög egyenlő a GFN szöggel, az ABM pedig az FGN-nel egyenlő, a harmadik AMB egyenlő a harmadik FNG-vel (I. 32.). Egyenlőszögű tehát az ABM háromszög az FGN háromszöggel. Hasonlóképen bebizonyítjuk, hogy a BMC háromszög is egyenlőszögű a GNH háromszöggel. Tehát az AM úgy aránylik az MB-hez, mint az FN az NG-hez, a BM pedig az MC-hez, mint a GN az NH-hoz. Ennélfogva az egyenlőség miatt az AM úgy aránylik az MC-hez, mint az FN az NH-hoz. De az AM úgy aránylik az MC-hez, mint az ABM (háromszög) az MBC-hez és mint az AME az EMC-hez. Mert úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik. Tehát az előtagok egyike úgy aránylik az utótagok egyikéhez, mint az összes előtagok az összes utótagokhoz (V. 12.). Tehát az AMB háromszög úgy aránylik a BMC-hez, mint az ABE a CBE-hez. De az AMB úgy aránylik a BMC-hez, mint az AM az MC-hez. És így az AM úgy aránylik az MC-hez, mint az ABE háromszög az EBC háromszöghöz. Ugyanebből az okból az FN úgy aránylik az NH-hoz, mint az FGL háromszög a GLH háromszöghöz. És az AM úgy aránylik az MC-hez, mint az FN az NH-hoz. Az ABE háromszög tehát úgy aránylik a BEC háromszöghöz, mint az FGL háromszög a GLH háromszöghöz és felcserélve az ABC háromszög az FGL háromszöghöz, mint a BEC háromszög a GLH háromszöghöz. Hasonlóképen bebizonyítjuk, meghúzva a BD-t, GK-t, hogy a BEC háromszög úgy aránylik az LGH háromszöghöz, mint az ECD háromszög az LHK háromszöghöz. És minthogy az ABC háromszög úgy aránylik az FGL háromszöghöz, mint az EBC az LGH-hoz és mint az ECD az LHK-hoz, az előtagok egyike úgy aránylik az utótagok egyikéhez, mint az összes előtagok az összes utótagokhoz (V. 12.). Tehát az ABE háromszög úgy aránylik az FGL háromszöghöz, mint az $ABCDE$ sokszög az $FGHKL$ sokszöghöz. De az ABC háromszögnek az FGL háromszöghöz való aránya négyzete a megfelelő AB oldalnak a megfelelő FG oldalhoz valónak. Mert a hasonló háromszögek egymással annak az aránynak a négyzetében vannak, melyben a megfelelő oldalok vannak (VI. 19.). Tehát az $ABCDE$ sokszögnek az $FGHKL$ sokszöghöz való aránya négyzete a megfelelő AB oldalnak a megfelelő FG oldalhoz valónak.

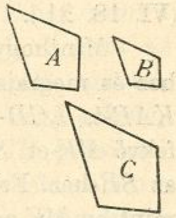
Tehát hasonló sokszögek hasonló és számra nézve az egésznek megfelelő háromszögekre osztatnak és a sokszögnek a sokszöghöz való aránya négyzete a megfelelő oldalnak a megfelelő oldalhoz valónak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

Porizma (következmény).

És (hasonlóképen) a négyoldalúaknál bizonyítjuk, hogy az arányuk négyzete a megfelelő oldalokénak. Bebizonyitottuk pedig a háromszögeknél is. Ennélfogva bármilyen hasonló egyenesvonalú idomok egymással annak az aránynak a négyzetében vannak, melyben a megfelelő oldalok vannak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

21.

Amelyek ugyanahhoz az egyenesvonalú idomhoz hasonlók, egymáshoz is hasonlók.

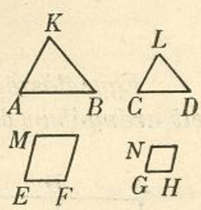


Legyen az AB egyenesvonalú idom mindegyike a C-hez hasonló. Azt mondom, hogy az A hasonló a B-hez.

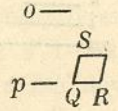
Minthogy hasonló az A a C-hez, egyenlőszögű vele és az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok arányosak (VI. I. def.). Viszont, minthogy hasonló a B a C-hez, egyenlőszögű vele és az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok arányosak. Az A, B mindegyike tehát a C-vel egyenlőszögű és az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok arányosak. Tehát az A hasonló a B-hez. Ezt kellett bebizonyítanunk.

22.

Ha négy egyenes arányos, a rájuk rajzolt hasonló és hasonlóan fekvő egyenesvonalú idomok is arányosak. És ha a rájuk rajzolt hasonló és hasonlóan fekvő egyenesvonalú idomok arányosak, maguk az egyenesek is arányosak.



Legyen a négy arányos egyenes AB, CD, EF, GH; az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az EF a GH-hoz és rajzoljuk meg az AB-re, CD-re a hasonló és hasonlóan fekvő KAB, LCD egyenesvonalú idomokat, az EF-re, GH-ra pedig a hasonló és hasonlóan fekvő MF, NH egyenesvonalú idomokat. Azt mondom, hogy a KAB úgy aránylik az LCD-hez, mint az MF az NH-hoz.



Vegyük fel az AB, CD harmadik arányosát, o-t, az EF, GH harmadik arányosát pedig p-t. És minthogy az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az EF a GH-hoz, a CD pedig az o-hoz, mint a GH a p-hez, az egyenlőség miatt az AB úgy aránylik az o-hoz, mint az EF a

p-hez. De az AB úgy aránylik az o-hoz, mint a KAB az LCD-hez (VI. 19. porizmája), az EF pedig a p-hez, mint az MF az NH-hoz. Tehát a KAB úgy aránylik az LCD-hez, mint az MF az NH-hoz.

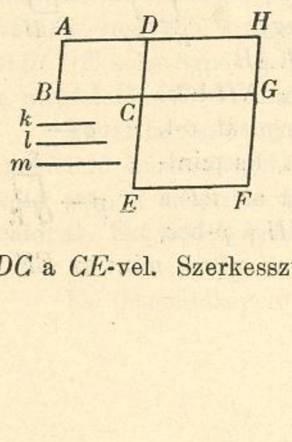
Legyen a KAB az LCD-vel oly arányban, mint az MF az NH-val. Azt mondom, hogy az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az EF a GH-hoz. Mert ha az AB nem úgy aránylik a CD-hez, mint az EF a GH-hoz, legyen az AB a CD-vel oly arányban, mint az EF a QR-rel és rajzoljuk meg a QR-re az MF, NH mindegyikéhez hasonló és vele hasonlóan fekvő SR egyenesvonalú idomot (VI. 18. 21.).

Minthogy az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az EF a QR-hez és megrajzoltuk az AB-re, CD-re a hasonló és hasonlóan fekvő KAB-t, LCD-t, az EF-re, QR-re pedig a hasonló és hasonlóan fekvő MF-et. SR-et, a KAB úgy aránylik az LCD-hez, mint az MF az SR-hez. Felvettük pedig, hogy a KAB úgy aránylik az LCD-hez, mint az MF az NH-hoz. Tehát az MF az NH, SR mindegyikével ugyanabban az arányban van. Az NH tehát egyenlő az SR-rel (V. 9.). És pedig hozzá hasonló és vele hasonlóan fekvő. A GH tehát egyenlő a QR-rel. És minthogy az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az EF a QR-hez, a QR pedig egyenlő a GH-val, az AB úgy aránylik a CD-hez, mint az EF a GH-hoz.

Ha tehát négy egyenes arányos, a rájuk rajzolt hasonló és hasonlóan fekvő egyenes vonalú idomok is arányosak. És ha a rájuk rajzolt hasonló és hasonlóan fekvő egyenesvonalú idomok arányosak, maguk az egyenesek is arányosak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

23.

Egyenlőszögű parallelogrammok egymással az oldalok összetett arányában állanak.



Legyen az AC, CF egyenlőszögű parallelogrammoknak BCD szögével egyenlő ECG szöge. Azt mondom, hogy az AC parallelogramm a CF parallelogrammal az oldalok összetett arányában áll.

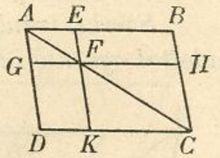
Helyezzük el egy egyenesbe a BC-t a CG-vel. Egy egyenesben van tehát a DC a CE-vel. Szerkesszük meg a DG parallelogrammot és helyezzük el a k egyenest úgy, hogy a BC úgy aránylik a CG-hez, mint a k az l-hez, a DC pedig úgy a CE-hez, mint az l az m-hez.

Tehát a k-nak az l-hez és az l-nek az m-hez való aránya az oldalok aránya, a BC-é a CG-hez és a DC-é a CE-hez. De a k-nak az m-hez való aránya összetevődik a k-nak az l-hez és az l-nek az m-hez való arányából. Ennélfogva a k-nak az m-hez való aránya az oldalok összetett aránya. És minthogy a BC úgy aránylik a CG-hez, mint az AC parallelogramm a CH-hoz, másrészt a BC a CG-hez, mint a k az l-hez, a k úgy aránylik az l-hez, mint az AC a CH-hoz. Viszont, minthogy a DC úgy aránylik a CE-hez, mint a CH parallelogramm a CF-hez, másrészt a DC a CE-hez, mint az l az m-hez, az l úgy aránylik az m-hez, mint a CH parallelogramm a CF parallelogrammhoz. Minthogy bebizonyítottuk, hogy a k úgy aránylik az l-hez, mint az AC parallelogramm a CH parallelogrammhoz, az l pedig úgy az m-hez, mint a CH parallelogramm a CF parallelogrammhoz, az egyenlőség miatt a k úgy aránylik az m-hez, mint az AC a CF parallelogrammhoz (V. 22.). A k pedig az m-mel az oldalok összetett arányában áll. Tehát az AC a CF-fel az oldalok összetett arányában áll.

Tehát egyenlőszögű parallelogrammok egymással az oldalok összetett arányában állanak. Ezt kellett bebizonyítanunk.

24.

Minden parallelogrammban az átló körül fekvő parallelogrammok hasonlók az egészhez és egymáshoz.



Legyen a parallelogramm $ABCD$, átlója AC, az AC körül fekvő parallelogrammok pedig EG, HK. Azt mondom, hogy az EG, HK parallelogrammok mindegyike hasonló az egész $ABCD$-hez és egymáshoz.

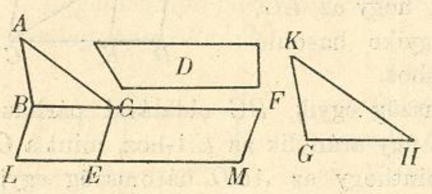
Minthogy az ABC háromszög egyik, BC oldalával párhuzamosan húztuk az EF-et, a BE úgy aránylik az EA-hoz, mint a CF az FA-hoz (VI. 2.). Viszont, minthogy az ACD háromszög egyik, CD oldalával párhuzamosan húztuk az FG-t, a CF úgy aránylik az FA-hoz, mint a DG a GA-hoz. De a CF úgy aránylik az FA-hoz, mint, miképen bebizonyítottuk, a BE az EA-hoz. Tehát a BE úgy aránylik az EA-hoz, mint a DG a GA-hoz és összetéve, a BA az AE-hez, mint a DA az AG-hez (V. 18.) és felcserélve, a BA az

AD-hez, mint az *EA* az *AG*-hez (V. 16.). Tehát az *ABCD*, *EG* parallelogrammoknak a közös *BAD* szöget befogó oldalaik arányosak. És minthogy párhuzamos a *GF* a *DC*-vel, az *AFG* szög egyenlő a *DCA* szöggel (I. 29.). És közös a két *ADC*, *AGF* háromszögnek *DAC* szöge. Egyenlőszögű tehát az *ADC* háromszög az *AGF* háromszöggel. Ugyanebből az okból az *ACB* háromszög egyenlőszögű az *AFE*-vel és az egész *ABCD* parallelogramm egyenlőszögű az *EG* parallelogrammal. Tehát az *AD* úgy aránylik a *DC*-hez, mint az *AG* a *GF*-hez, a *DC* a *CA*-hoz, mint a *GF* az *FA*-hoz, az *AC* a *CB*-hez, mint az *AF* az *FE*-hez és a *CB* a *BA*-hoz, mint az *FE* az *EA*-hoz. És minthogy bebizonyítottuk, hogy a *DC* úgy aránylik a *CA*-hoz, mint a *GF* az *FA*-hoz, az *AC* pedig a *CB*-hez, mint az *AF* az *FE*-hez, az egyenlőség miatt a *DC* úgy aránylik a *CB*-hez, mint a *GF* az *FE*-hez (V. 22.). Tehát az *ABCD*, *EG* parallelogrammoknak az egyenlő szögeket befogó oldalaik arányosak. Hasonló tehát az *ABCD* parallelogramm az *EG* parallelogrammhoz. Ugyanebből az okból az *ABCD* parallelogramm a *KH* parallogrammhoz is hasonló. Tehát az *EG*, *HK* parallelogrammok mindegyike az *ABCD*-hez hasonló. Amelyek pedig ugyanahhoz az egyenesvonalú idomhoz hasonlók, egymáshoz is hasonlók (VI. 21.). Tehát az *EG* parallelogramm a *HK* parallelogrammhoz is hasonló.

Tehát minden parallelogrammban az átló körül fekvő parallelogrammok hasonlók az egészhez és egymáshoz. Ezt kellett bebizonyítanunk.

25.

Szerkesszünk adott egyenesvonalú idomhoz hasonló és más adottal egyenlő idomot.



Legyen az adott egyenesvonalú idom, melyhez hasonlót szerkesszünk, az *ABC*, az pedig, mellyel egyenlő, a *D*. Szerkesszünk az *ABC*-hez hasonlót, a *D*-vel pedig egyenlőt.

Szabjuk ki a *BC*-re az *ABC* háromszöggel egyenlő *BE* parallelogrammot (I. 44.), a *CE*-re pedig a *D*-vel egyenlő *CM* parallelogrammot az *FCE* szögre, mely egyenlő a *CBL* szöggel (I. 45.). Egy egyenesben van tehát a *BC* a *CF*-fel, az *LE* pedig az *EM*-mel.

Vegyük fel a BC, CF középarányosát, GH-t (VI. 13.) és rajzoljuk meg a GH-ra az ABC-hez hasonló és vele hasonlóan fekvő KGH-t (VI. 18.).

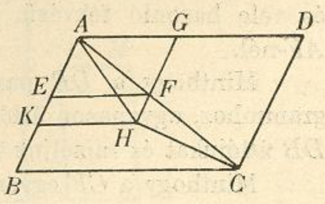
Minthogy a BC úgy aránylik a GH-hoz, mint a GH a CF-hez, ha pedig három egyenes arányos, az első úgy aránylik a harmadikhoz, mint az elsőre szerkesztett idom a másodikra szerkesztett hasonló és hasonlóan fekvő idomhoz (VI. 19. porizmája), a BC úgy aránylik a CF-hez, mint az ABC háromszög a KGH háromszöghöz. De a BC úgy aránylik a CF-hez, mint a BE parallelogramm az EF parallelogrammhoz (VI. 1.). Az ABC háromszög tehát úgy aránylik a KGH háromszöghöz, mint a BE parallelogramm az EF parallelogrammhoz. Felcserélve tehát (V. 16.) az ABC háromszög úgy aránylik a BE parallelogrammhoz, mint a KGH háromszög az EF parallelogrammhoz. Az ABC háromszög pedig egyenlő a BE parallelogrammal. Tehát a KGH háromszög is egyenlő az EF parallelogrammal. De az EF parallelogramm egyenlő a D-vel. Tehát a KGH háromszög is egyenlő a D-vel. És a KGH az ABC-hez hasonló.

Tehát az adott ABC egyenesvonalú idomhoz hasonló és a más adott D-vel egyenlő KGH-t szerkesztettük meg. Ezt kellett elvégeznünk.

26.

Ha a parallelogrammból elveszünk egy az egészhez hasonló és vele hasonló fekvésű parallelogrammot, melynek azzal közös szöge van, ez ugyanazon átló körül fekszik, mint az egész.

Az $ABCD$ parallelogrammból vegyük el az $ABCD$-hez hasonló és vele hasonlóan fekvő AF-et, melynek azzal közös DAB szöge van. Azt mondom, hogy ugyanazon átló körül fekszik az $ABCD$ és az AF.



Mert ne legyen így, hanem, ha lehet, legyen az átló AHC; hosszabbítsuk meg a GF-et a H-ig és húzzuk meg a H-n át az AD, BC mindegyikével párhuzamos HK-t.

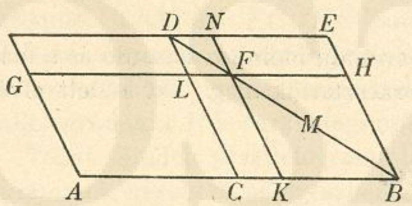
Minthogy ugyanazon átló körül fekszik az $ABCD$ és a KG, a DA úgy aránylik az AB-hez, mint a GA az AK-hoz. Pedig az $ABCD$, EG hasonlóságának okából a DA úgy aránylik az AB-hez, mint a

GA az AE-hez. A GA tehát úgy aránylik az AK-hoz, mint a GA az AE-hez. A GA tehát az AK, AE mindegyikével ugyanabban az arányban van. Tehát az AE egyenlő az AK-val, a kisebbik a nagyobbikkal. De ez lehetetlen. Tehát nem lehetséges, hogy nem ugyanazon átló körül legyen az $ABCD$ és az AF. Tehát ugyanazon átló körül fekszik az $ABCD$ parallelogramm, mint az AF parallelogramm.

Ha tehát a parallelogrammból elveszünk egy az egészhez hasonló és vele hasonló fekvésű parallelogrammot, melynek azzal közös szöge van, ez ugyanazon átló körül fekszik, mint az egész. Ezt kellett bebizonyítanunk.

27.

Ugyanarra az egyenesre kiszabott összes parallelogrammok közül, melyeknek pótlékai a felére rajzolt parallelogrammhoz hasonlók és vele hasonló fekvésűek, a legnagyobb az egyenes felére kiszabott, a pótlékához hasonló (parallelogramm).



Legyen az egyenes AB; felezzük ezt meg C-ben és szabjuk ki az AB egyenesre az AD parallelogrammot, melynek pótléka az AB felére, azaz a CB-re rajzolt DB parallelogramm. Azt mondom, hogy az AB-re kiszabott összes parallelogrammok közül, melyeknek pótlékai a DB-hez hasonlók és vele hasonló fekvésűek, a legnagyobb az AD. Szabjuk ki ugyanis az AB egyenesre az AF parallelogrammot, melynek FB pótléka a DB-hez hasonló és vele hasonló fekvésű. Azt mondom, hogy nagyobb az AD az AF-nél.

Minthogy a DB parallelogramm hasonló az FB parallelogrammhoz, ugyanazon átló körül fekszenek (VI. 26.). Húzzuk meg a DB átlójukat és rajzoljuk meg az idomot.*

Minthogy a CF egyenlő az FE-vel (I. 43.), közös pedig az FB, az egész CH egyenlő az egész KE-vel. De a CH egyenlő a CG-vel, minthogy az AC egyenlő a CB-vel. Tehát a GC egyenlő az EK-val. Adjuk hozzá a közös CF-et. Tehát az egész AF egyenlő az LMN

* Ez azt jelenti: hosszabbítsuk meg a GF-et H-ig és a KF-et N-ig, mint a II. könyv 7. feladatában.

gnomonnal.* Ennélfogva *DB* parallelogramm, azaz az *AD*, az *AF* parallelogrammnál nagyobb.

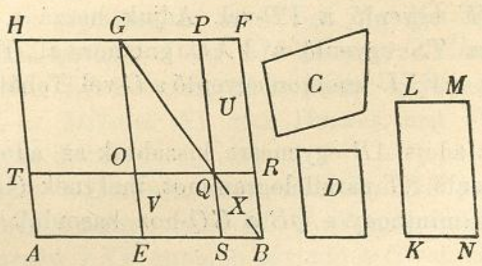
Tehát ugyanarra az egyenesre kiszabott összes parallogrammok közül, melyeknek pótlékai a felére rajzolt parallelogrammhoz hasonlók és vele hasonló fekvésűek, a legnagyobb a felére kiszabott (parallelogramm). Ezt kellett bebizonyítanunk.

E feladat fogalmazása oly nehéz, hogy okvetetlenül némi magyarázatra szorul. «A felére rajzolt parallelogramm» mindenekelőtt az adott egyenes felére rajzolt *romboszt* jelenti (Euklides ezt magától értetődőnek tartotta; csak *romboid esetében* adta meg külön a két alkotó oldalának hosszuságát). A *GABH* parallelogrammban továbbá az *FKBH a pótlék*, mely a *GAKF* parallelogrammot egészíti ki épen a *GABH*, azaz az *AB*-re rajzolt parallelogrammá. A pótlék végre az adott vonal «felére rajzolt parallelogrammhoz hasonló», tehát szintén *rombosz*. — Mai jelöléseinkkel ennélfogva így adhatjuk a feladat értelmezését: $(a-x)\,x\,.\sin GAC$, azaz az $a = AB$ szeleteiből megalkotott parallelogramm területe a legnagyobb, ha x az *AB*-nek a fele. (Az első ókori maximumszámítási feladat.)

28.

Adott egyenesre szabjunk ki adott egyenesvonalú idommal egyenlő parallelogrammot, melynek pótléka adott parallelogrammhoz hasonló. De az adott egyenesvonalú (mellyel egyenlőt kell kiszabni) ne legyen nagyobb a felére rajzolt, pótlékához hasonló parallelogrammnál.

Legyen az adott egyenes *AB*, az adott egyenesvonalú pedig, mellyel egyenlőt kell az *AB*-re kiszabni, a *C* ne legyen nagyobb az



AB felére rajzolt, pótlékához hasonlónál, a pótlékhoz hasonló pedig legyen a *D*. Az adott *AB* egyenesre szabjunk ki az adott *C* egye-

* A gnomon fogalmát l. II. könyv II. def.

nesvonalúval egyenlő parallelogrammot, melynek pótléka a D parallelogrammhoz hasonló.

Felezzük meg az AB-t E pontban, rajzoljuk meg az EB-re a D-hez hasonló és vele hasonló fekvésű $EBFG$-t (VI. 18.) és rajzoljuk ki az AG parallelogrammot.

Ha az AG épen egyenlő a C-vel, a feladatot már is megoldottuk. Mert kiszabtuk az adott AB egyenesre az adott C egyenesvonalúval egyenlő AG parallelogrammot, melynek GB pótléka hasonló a D-hez. Ha pedig nem, legyen a HE nagyobb a C-nél. A HE pedig egyenlő a GB-vel. Nagyobb tehát a GB a C-nél. Szerkesszük meg azzal a többlettel — mellyel a GB nagyobb a C-nél — egyenlő, a D-hez pedig hasonló és vele hasonlóan fekvő $KLMN$-et (VI. 25.). De a D a GB-hez hasonló. Tehát a KM is a GB-hez hasonló (VI. 21.). Megfelel pedig a KL a GE-nek és az LM a GF-nek. És minthogy a GB annyi, mint C, KM, nagyobb a GB a KM-nél. Nagyobb tehát a GE a KL-nél, a GF pedig az LM-nél. Tegyük egyenlővé a KL-lel a GO-t, az LM-mel pedig a GP-t és szerkesszük meg az $OGPQ$ parallelogrammot. Egyenlő tehát és hasonló (a GQ-val) a KM. Tehát a GQ a GB-hez hasonló (VI. 21.). Tehát ugyanazon átló körül fekszik a GQ a GB-vel (VI. 26.) Legyen az átlójuk GQB és rajzoljuk meg az idomot.*

Minthogy a BG annyi, mint C, KM, melyek közül a GQ egyenlő a KM-mel, a fenmaradó UXV gnomon egyenlő a fenmaradó C-vel. És minthogy a PR egyenlő az OS-sel (I. 43), adjuk hozzá a közös QB-t. Tehát az egész PB egyenlő az egész OB-vel. De az OB egyenlő a TE-vel, mert az AE oldal egyenlő az EB-oldallal. Tehát a TE egyenlő a PB-vel. Adjuk hozzá a közös OS-et. Tehát az egész TS egyenlő a VXU gnomonnal. Bebizonyítottuk azonban, hogy a VXU gnomon egyenlő a C-vel. Tehát a TS egyenlő a C-vel.

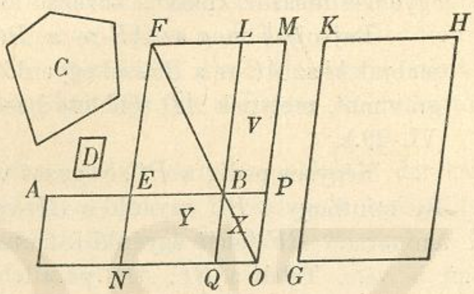
Tehát az adott AB egyenesre kiszabtuk az adott C egyenesvonalúval egyenlő ST parallelogrammot, melynek QB pótléka hasonló a D-hez (minthogy a QB a GQ-hoz hasonló). Ezt kellett elvégeznünk.

* Hasonlóan a VI. könyv 27. feladatának jegyzetében leírt mód szerint.

29.

Adott egyenesre szabjunk ki adott egyenesvonalú idommal egyenlő parallelogrammot, melynek többlete adott parallelogrammhoz hasonló.

Legyen az adott egyenes az AB, az adott egyenesvonalú, mellyel egyenlőt kell az AB-re kiszabni, a C, a többlethez hasonló pedig a D. Az AB egyenesre szabjunk ki a C egyenesvonalúval egyenlő parallelogrammot, melynek többlete a D parallelogrammhoz hasonló.



Felezzük meg az AB-t E-ben, rajzoljuk meg az EB-re a D-hez hasonló és vele hasonlóan fekvő BF parallelogrammot és szerkesszük meg a BF, C összegével egyenlő, a D-hez pedig hasonló és vele hasonlóan fekvő GH-t (VI. 25.). Megfelel pedig a KH az FL-nek és a KG az FE-nek. És minthogy nagyobb a GH az FB-nél, a KH is nagyobb az FL-nél, a KG pedig az FE-nél. Hosszabbítsuk meg az FL-et, FE-t, legyen a KH-val egyenlő FLM, a KG-vel pedig egyenlő FEN és rajzoljuk ki az MN-et. Az MN tehát egyenlő a GH-val és hozzá hasonló. De a GH hasonló az EL-hez. Tehát az MN is hasonló az EL-hez (VI. 21.). Tehát ugyanazon átló körül fekszik az EL az MN-nel (VI. 26.). Húzzuk meg FO átlójukat és rajzoljuk meg az idomot.*

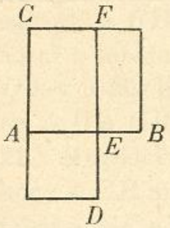
Minthogy a GH annyi, mint EL, C, a GH pedig az MN-nel egyenlő, az MN is annyi, mint EL, C. Vonjuk ki a közös EL-et. Tehát a fenmaradó YXV gnomon egyenlő a C-vel. És minthogy az AE egyenlő az EB-vel, az AN egyenlő az NB-vel, azaz az LP-vel. Adjuk hozzá a közös EO-t. Tehát az egész AO egyenlő az YXV gnomonnal. De az YXV gnomon egyenlő a C-vel. Tehát az AO egyenlő a C-vel.

* Lásd a VI. könyv 28. feladatának jegyzetét.

Tehát az adott AB egyenesre kiszabtuk az adott C egyenesvonalúval egyenlő AO parallelogrammot, melynek többlete, a QP parallelogramm hasonló a D-hez, minthogy az EL hasonló a QP-hez. Ezt kellett elvégeznünk.

30.

Adott határolt egyenest messünk külső és középső arány szerint.



Legyen az adott határolt egyenes AB. Az AB egyenest messük külső és középső arány szerint.

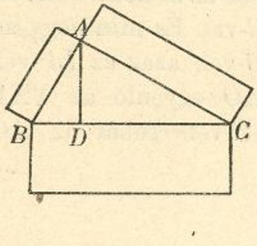
Rajzoljuk meg az AB-re a BC négyzetet és szabjuk ki az AC-re a BC-vel egyenlő CD parallelogrammot, melynek AD többlete hasonló a BC-hez (VI. 29.).

Négyzet pedig a BC. Négyzet tehát az AD is. És minthogy a BC egyenlő a CD-vel, vonjuk le a közös CE-t. A fenmaradó BF tehát egyenlő a fenmaradó AD-vel. És egyenlőszögű is vele. Tehát a BF, AD (parallelogrammokban) fordítottan arányosak az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok (VI. 14.). Az FE tehát úgy aránylik az ED-hez, mint az AE az EB-hez. Az FE pedig egyenlő az AB-vel, az ED meg az AE-vel. Tehát a BA úgy aránylik az AE-hez, mint az AE az EB-hez. Nagyobb pedig az AB az AE-nél. Nagyobb tehát az AE is az EB-nél (V. 14.).

Tehát az AB egyenest külső és középső arány szerint metszettük E-ben és a nagyobb szelete AE. Ezt kellett elvégeznünk.

31.

A derékszögű háromszögekben a derékszöget átfogó oldalra rajzolt idom egyenlő a derékszöget befogó oldalokra rajzolt hasonló idomokkal.



Legyen az ABC derékszögű háromszög derékszöge a BAC. Azt mondom, hogy a BC-re rajzolt idom egyenlő a BA-ra, AC-re rajzolt hasonló idomokkal.

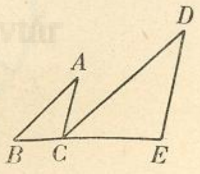
Húzzuk meg az AD merőlegest.

Minthogy az ABC derékszögű háromszögben az A-nál fekvő derékszögből a *BC* alapra bocsátott merőleges az *AD*, a merőleges mellett fekvő *ABD*, *ADC* háromszögek hasonlók az egész *ABC*-hez és egymáshoz (VI. 8.). És minthogy hasonló az *ABC* az *ABD*-hez, a *CB* úgy aránylik a *BA*-hoz, mint az *AB* a *BD*-hez. És minthogy három egyenes arányos, az első úgy aránylik a harmadikhoz, mint az elsőre szerkesztett idom a másodikra szerkesztett hasonló idomhoz (VI. 19. porizmája). A *CB* tehát úgy aránylik a *BD*-hez, mint a *CB*-re rajzolt idom a *BA*-ra rajzolt hasonló idomhoz. Ugyanebből az okból a *BC* úgy aránylik a *CD*-hez, mint a *BC*-re rajzolt idom a *CA*-ra rajzolt hasonló idomhoz. Ennélfogva a *BC* úgy aránylik a *BD*, *DC* összegéhez, mint a *BC*-re rajzolt idom a *BA*-ra, *AC*-re rajzolt hasonló idomokhoz. De a *BC* annyi, mint *BD*, *CD*. Tehát a *BC*-re rajzolt idom egyenlő a *BA*-ra, *AC*-re rajzolt hasonló idomokkal.

Tehát a derékszögű háromszögekben a derékszöget átfogó oldalra rajzolt idom egyenlő a derékszöget befogó oldalokra rajzolt hasonló idomokkal. Ezt kellett bebizonyítanunk.

32.

Ha két háromszög, melyeknek két oldallal arányos két oldaluk van, egy szögnél összeér, úgy hogy a megfelelő oldalok párhuzamosak, a fenmaradó oldalok egy egyenesbe esnek.



Legyen a két háromszög *ABC*, *DCE*, melyeknek két *BA*, *AC* oldalával a két *DC*, *DE* oldaluk arányos; az *AB* úgy aránylik az *AC*-hez, mint a *DC* a *DE*-hez, az *AB* pedig párhuzamos a *DC*-vel, az *AC* meg a *DE*-vel. Azt mondom, hogy egy egyenesbe esnek *BC*, *CE*.

Minthogy párhuzamos az *AB* a *DC*-vel és metszi őket az *AC* egyenes, a *BAC*, *ACD* váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). Ugyanebből az okból a *CDE* szög is egyenlő az *ACD* szöggel. Ennélfogva a *BAC* szög egyenlő a *CDE* szöggel. És minthogy a két *ABC*, *DCE* háromszögnek az *A*-nál fekvő szöge egyenlő a *D*-nél fekvő szögével, az egyenlő szögek mellett fekvő oldalok pedig arányosok, a *BA* úgy aránylik az *AC*-hez, mint a *CD* a *DE*-hez, egyenlőszögű az *ABC* háromszög a *DCE* háromszöggel (VI. 6.). Tehát az *ABC* szög egyenlő a *DCE* szöggel. Bebizonyítottuk pedig, hogy az *ACD* szög egyenlő a *BAC*-vel. Tehát az egész *ACE* szög egyenlő a két *ABC*-

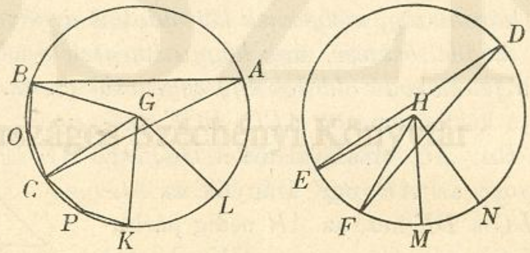
vel, BAC-vel. Adjuk hozzá a közös ACB-t. Az ACE, ACB tehát annyi, mint BAC, ACB, CBA. De BAC, ABC, ACB két derékszöggel egyenlő (I. 32.). Tehát ACE, ACB is két derékszöggel egyenlő. Így az AC egyenesnek C pontjánál a két BC, CE egyenes mindkét oldalán a két derékszöggel egyenlő ACE, ACB mellékszögeket alkotja. Egy egyenesbe esnek tehát BC, CE (I. 14.).

Ha tehát két háromszög, melyeknek két oldallal arányos két oldaluk van, egy szögnél összeér, úgy hogy a megfelelő oldalok arányosak, a fenmaradó oldalok egy egyenesbe esnek. Ezt kellett bebizonyítanunk.

33.

Egyenlő körökben a szögek ugyanabban az arányban vannak, mint az ívek, amelyeken állnak, akár középpontiak, akár kerületiek (a szögek).

Legyenek az egyenlő körök ABC, DEF és G, H középpontjaiknál legyenek a BGC, EHF, kerületeiken pedig a BAC, EDF szögek. Azt mondom, hogy a BC ív úgy aránylik az EF ívhez, mint a BGC szög az EHF szöghöz és mint a BAC szög az EDF szöghöz.



Tegyük a BC ívvel egyenlővé a bárhány szomszédos CK-t, KL-et, az EF-fel pedig egyenlővé a bárhány FM-et, MN-et és húzzuk meg GK-t, GL-et, HM-et, HN-et.

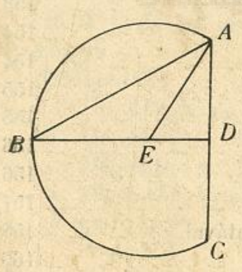
Minthogy egyenlők a BC, CK, KL ívek egymással, egyenlők a BGC, CGK, KGL szögek is egymással (III. 27.). Tehát ahányszorosa a BL ív a BC-nek, annyiszorosa a BGL szög a BGC-nek. Ugyanebből az okból, ahányszorosa az NE ív az EF-nek, annyiszorosa az NHE szög az EHF-nek. Ha tehát a BL ív egyenlő az EN ívvel, a BGL szög is egyenlő az EHN szöggel, ha a BL ív nagyobb az EN ívnél, a BGL szög is nagyobb az EHN szögnél és ha az kisebb annál, ez is kisebb ennél. Igy négy adott mennyiség között a két BC, EF ív és a két BGC, EHF szög között felvettük, hogy a BC ívnek és a BGC szögnek egyenlő többszörösei a BL ív és a BGL szög, az EF ívnek és az EHF szögnek pedig az EN ív és az EHN szög. És bebizonyítottuk, hogy, ha a BL ív meghaladja az EN ívet, a BGL szög is meghaladja az EHN szöget, ha az egyenlő azzal, ez is egyenlő ezzel és ha az kisebb annál, ez is kisebb ennél. Tehát a BC ív úgy aránylik az EF-hez, mint a BGC szög az EHF-hez (V. V. def.). Másrészt meg a BGC szög úgy aránylik az EHF-hez, mint a BAC szög az EDF-hez (V. 15.). Mert amazok mindegyike kétszerese emezek mindegyikének (III. 20.). Tehát a BC ív úgy aránylik az EF ívhez, mint a BGC szög az EHF szöghöz és mint BAC szög az EDF szöghöz.

Tehát egyenlő körökben a szögek ugyanabban az arányban vannak, mint az ívek, amelyeken állnak, akár középpontiak, akár kerületiek (a szögek). Ezt kellett bebizonyítanunk.

TARTALOMJEGYZÉK.

Hiba kiigazítás.

A 94. lapon (III. 25.) tévedésből az egyik ábra kimaradt. A hiányzó ábrát ideiktatjuk e helyen és a hozzátartozó szöveget, (mely a 94. lapon felülről a 17. sorban kezdődik) hozzácsatoljuk :



Ha pedig az ABD kisebb a BAD-nél és megszerkesztjük a BA egyenesre annak A pontjában az ABD-vel egyenlő szöget, az ABC körszeleten kivül esik a középpont DB-be és kitünik, hogy az ABC körszelet nagyobb a félkörnél.